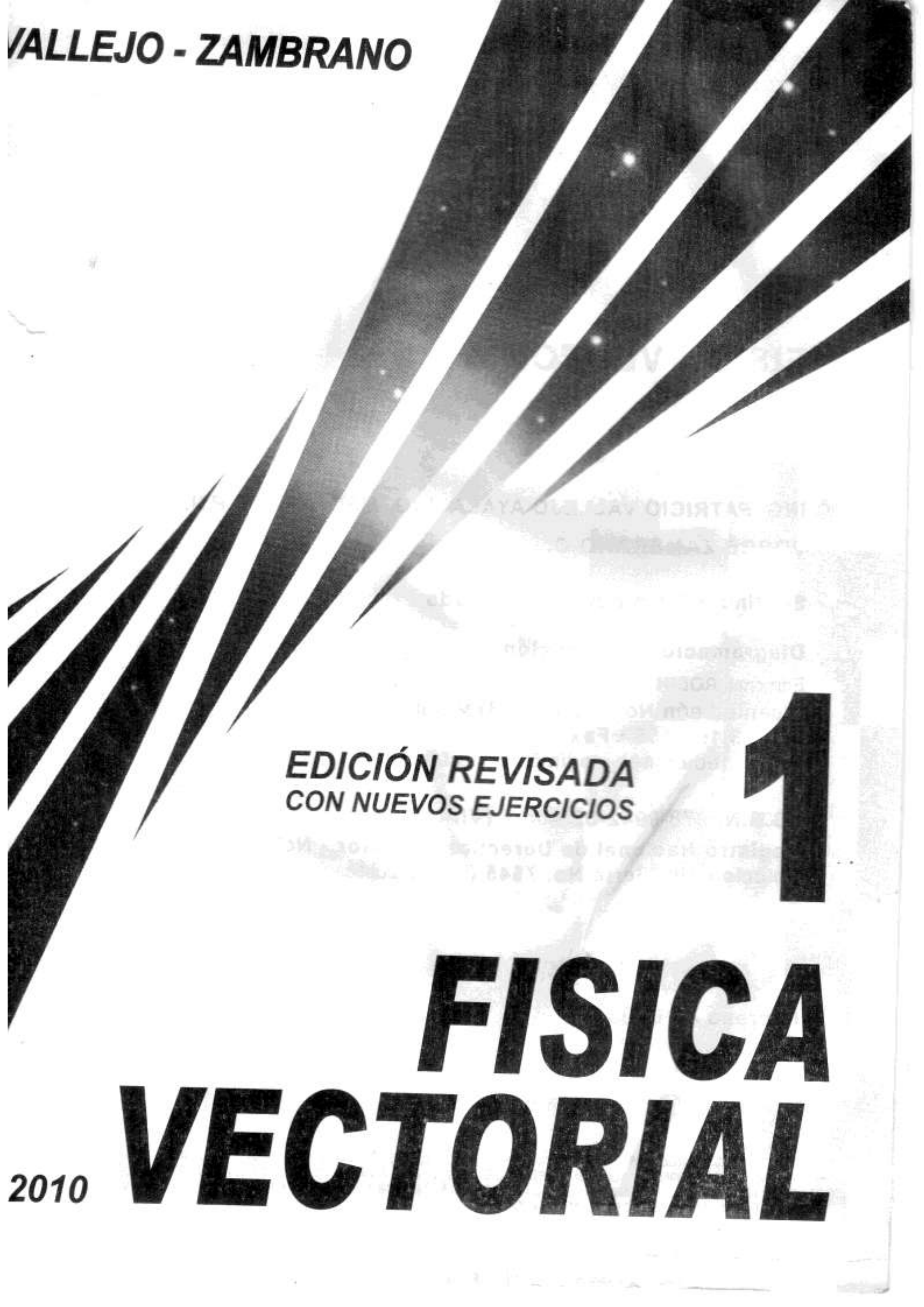
VALLEJO - ZAMBRANO
EDICIÓN REVISADA
CON NUEVOS EJERCICIOS
1
FISICA
VECTORIAL
2010


VALLEJO - ZAMBRANO
EDICIÓN REVISADA
CON NUEVOS EJERCICIOS
1
FISICA
VECTORIAL
2010

FISICA VECTORIAL 1

© **ING. PATRICIO VALLEJO AYALA**, ING. MECÁNICO E.P.N., MSc.
JORGE ZAMBRANO O.

Séptima Edición 2009 - Revisada

Diagramación e Impresión:

Ediciones **RODIN**
Vicente León No. 423 (N5-23) y Chile-La Tola
Telf.: 3 160 155 • Fax: 3 163-173
E-mail: ediciones_rodin@hotmail.es

I.S.B.N. 978-9942-02-465-7 (VII-09)
Registro Nacional de Derechos de Autor - No. 031671(VIII-09)
Solucionario: **Serie No. 7545** (Inédito, publicación protegida no comercial)

Impreso en Ecuador

CONTENIDO

1. VECTORES

2. CINEMÁTICA

3. DINÁMICA

3.1 Fuerzas

3.2 Leyes de Newton

3.3 Fuerzas en el Movimiento Circular

3.4 Equilibrio de un sólido

1. VECTORES

1.1 SISTEMAS DE UNIDADES

La Física se ocupa casi exclusivamente de cantidades mensurables. Por tanto, es muy importante saber exactamente qué es lo que se entiende por medida.

MAGNITUD. Es todo aquello que puede ser medido.

MEDIDA. Es la comparación de una magnitud con otra de la misma especie, que arbitrariamente se toma como unidad. La magnitud de una cantidad física se expresa mediante un número de veces la unidad de medida.

En el estudio de la Física se distinguen dos tipos de magnitudes: fundamentales y derivadas.

• **Las magnitudes fundamentales** no se definen en términos de otras magnitudes y dependen del sistema de unidades. En el sistema absoluto, las magnitudes fundamentales son:

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO	DIMENSIÓN
Longitud	metro	m	L
Masa	kilogramo	kg	M
Tiempo	segundo	s	T
Temperatura	kelvin	^{0}k	θ
Cantidad substancia	mol	mol	N
Intensidad luminosa	candela	cd	
Intensidad de corriente	amperio	A	I

• **Las magnitudes derivadas** se forman mediante la combinación de las magnitudes fundamentales. Ejemplos:

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO	DIMENSIÓN
Velocidad	metro/segundo	m/s	LT^{-1}
Aceleración	metro/seg^2	m/s^2	LT^{-2}
Fuerza	Newton	N	MLT^{-2}
Densidad	kilogramo/metro^3	kg/m^3	ML^{-3}
Energia	joule	J	ML^2T^{-2}

• **Las magnitudes suplementarias** son aquellas que no han sido clasificadas como fundamentales o derivadas.

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO	DIMENSIÓN
Ángulo plano	Radián	rad	α
Ángulo sólido	Estereoradián	Sr	ω

SISTEMAS DE UNIDADES

El sistema absoluto está formado por:

- El sistema MKS (SI): metro, kilogramo, segundo.
- El sistema CGS: centímetro, gramo, segundo.
- El sistema FPS: pie, libra, segundo.

El sistema técnico está formado por:

- El sistema MKS (europeo): metro, unidad técnica de masa, segundo.
- El sistema FPS (inglés): pie, slug, segundo.

Prefijos que forman los múltiplos del **SI**:

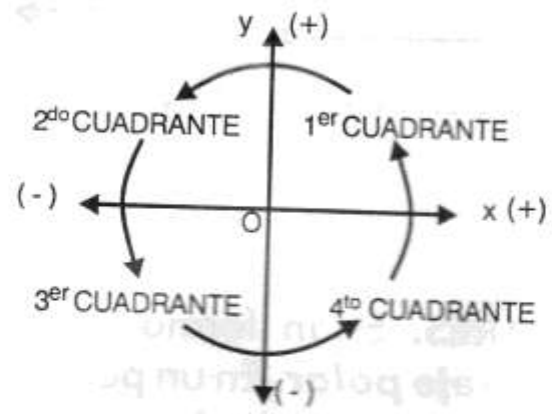
PREFIJOS	SÍMBOLO	FACTOR DE MULTIPLICACIÓN
exa	E	10^{18} = 1 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15} = 1 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
mega	M	10^{6} = 1 000 000
kilo	K	10^{3} = 1 000
hecto	H	10^{2} = 1 00
deca	D	10^{1} = 1 0

Prefijos que forman los submúltiplos del **SI**:

PREFIJOS	SÍMBOLO	FACTOR DE MULTIPLICACIÓN
deci	d	10^{-1} = 0.1
centi	c	10^{-2} = 0.01
mili	m	10^{-3} = 0.001
micro	μ	10^{-6} = 0.000 001
nano	n	10^{-9} = 0.000 000 001
pico	p	10^{-12} = 0.000 000 000 001
femto	f	10^{-15} = 0.000 000 000 000 001
ato	a	10^{-18} = 0.000 000 000 000 000 001

1.2 SISTEMA DE COORDENADAS EN EL PLANO

COORDENADAS RECTANGULARES. Están formadas por dos ejes numéricos perpendiculares entre sí. El punto de intersección se considera como el origen de cada uno de los ejes numéricos x e y. Este punto se llama ***origen de coordenadas*** y se designa con la letra O.



El eje horizontal se denomina ***abscisa*** o eje de las **x**. Es positiva a la derecha del origen, y negativa a la izquierda.

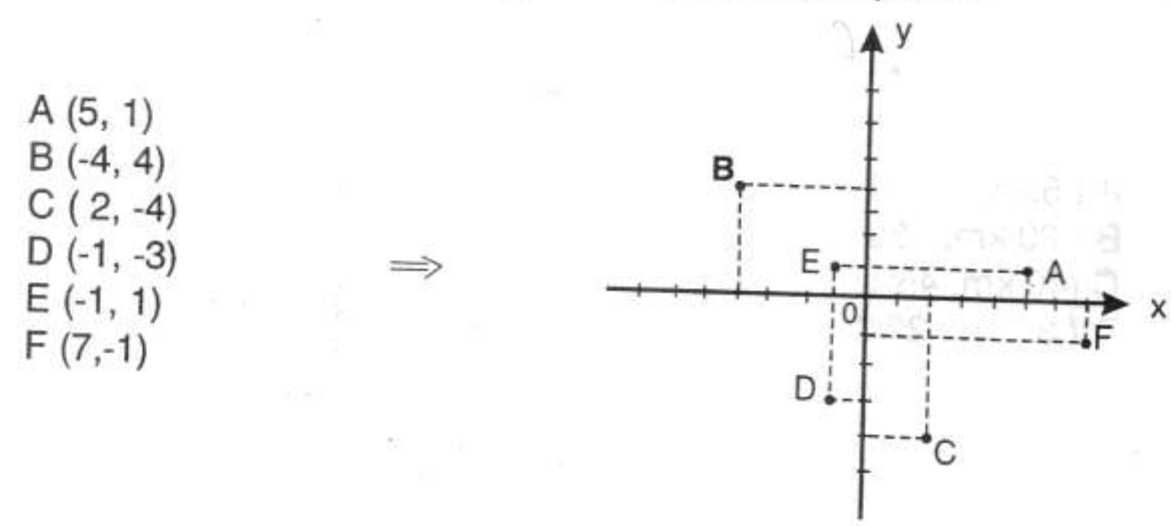
El eje vertical se denomina ***ordenada*** o eje de las ***y***. Es positiva hacia arriba del origen, y negativa hacia abajo.

Estos ejes numéricos perpendiculares dividen el plano en cuatro cuadrantes ordenados.

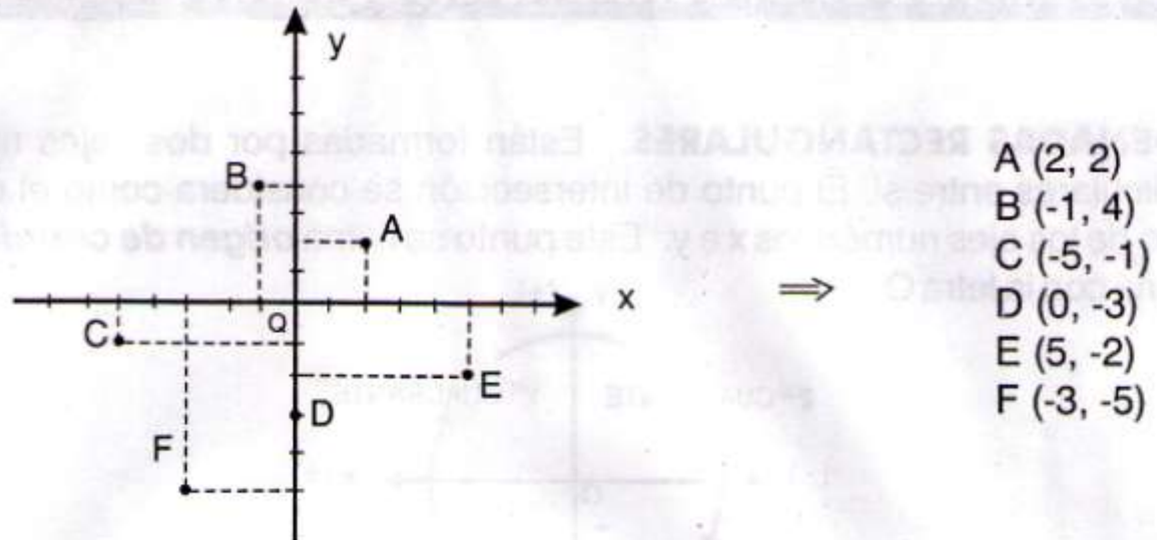
La posición de un punto en el plano queda determinada por un par de números ordenados (x, y), llamados ***coordenadas rectangulares***, que corresponden a la intersección de una abscisa (x) y una ordenada (y).

Recíprocamente, a un par de números (x, y) corresponde un punto en el plano, para el cual **x** es la abscisa y ***y*** la ordenada. Ejemplos:

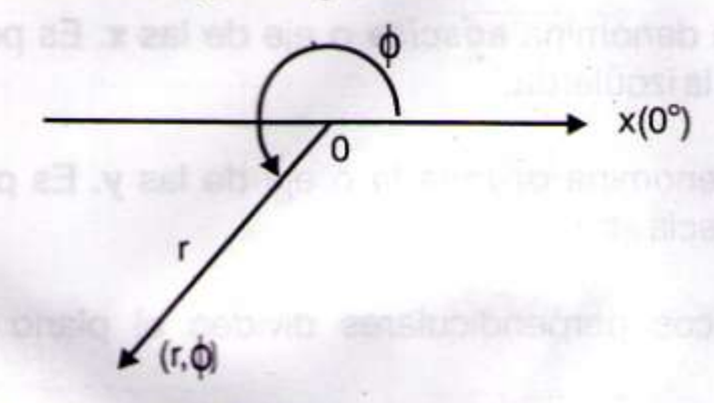
1. Representar la posición de los siguientes puntos en el plano:



2. Determinar qué coordenadas rectangulares representan los siguientes puntos.

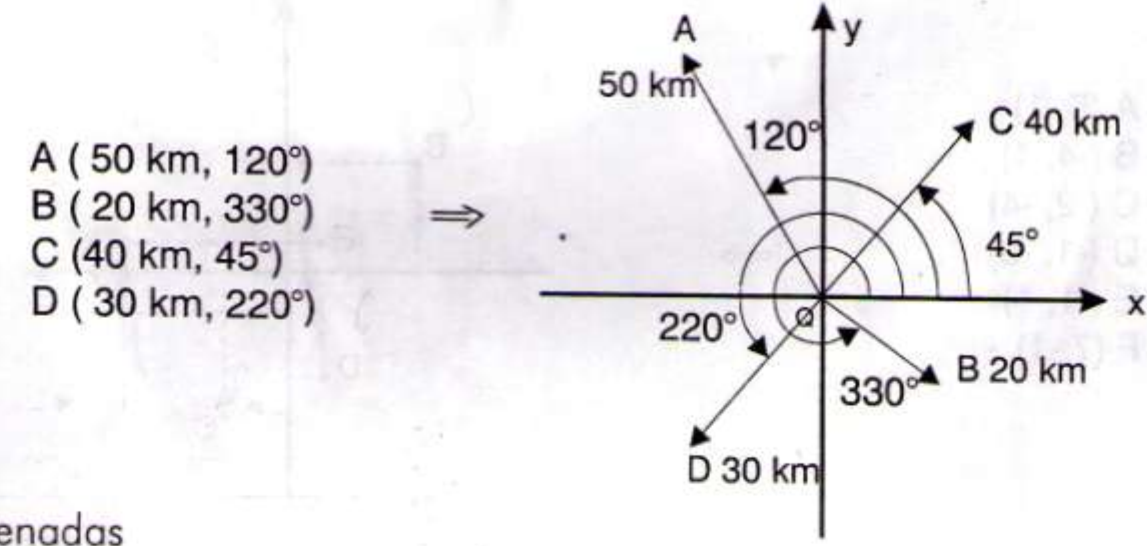


COORDENADAS POLARES. Están formadas por un eje numérico de referencia x, denominado ***eje polar***. En un punto de éste se halla el origen de coordenadas ***0***, llamado ***origen o polo***.

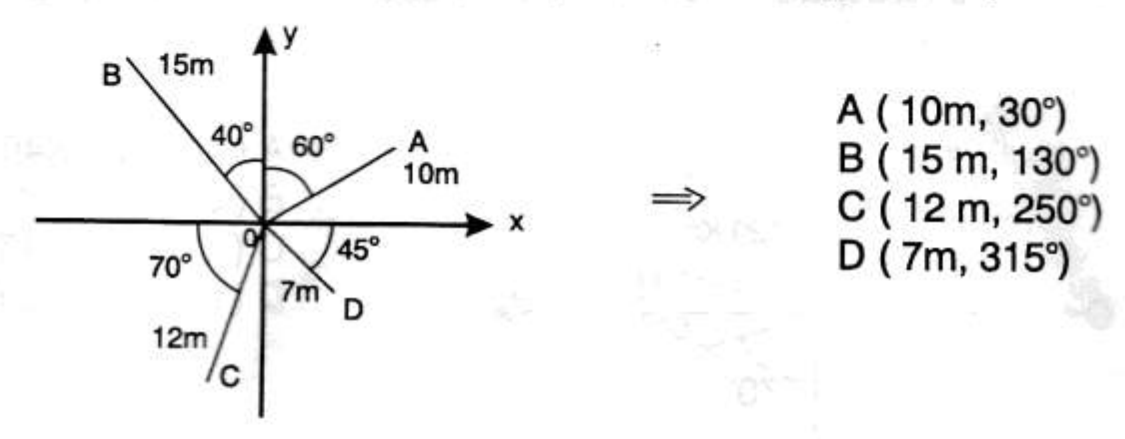


La posición de un punto en el plano queda determinada por un par ordenado (r.**0**), donde ***r*** es el **radio vector** y representa la distancia positiva del origen al punto; y **0**0 es el ***ángulo polar*** y representa la medida del ángulo desde el eje polar hasta el radio vector, en sentido antihorario.
Ejemplos:

1. Representar la posición de los siguientes puntos en el plano:



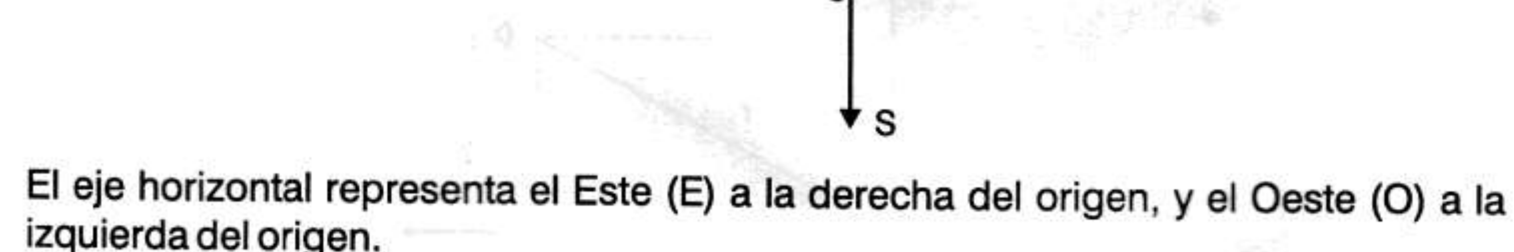
2. Determinar qué coordenadas polares representan los siguientes puntos:



⟹

A (10m, 30°)
B (15 m, 130°)
C (12 m, 250°)
D (7m, 315°)

COORDENADAS GEOGRÁFICAS. Están formadas por dos ejes perpendiculares entre sí. El punto de intersección de los ejes se considera como el origen de cada uno de ellos. Estos ejes perpendiculares dividen al plano en los cuatro puntos cardinales: Norte, Sur, Este y Oeste.



El eje horizontal representa el Este (E) a la derecha del origen, y el Oeste (O) a la izquierda del origen.

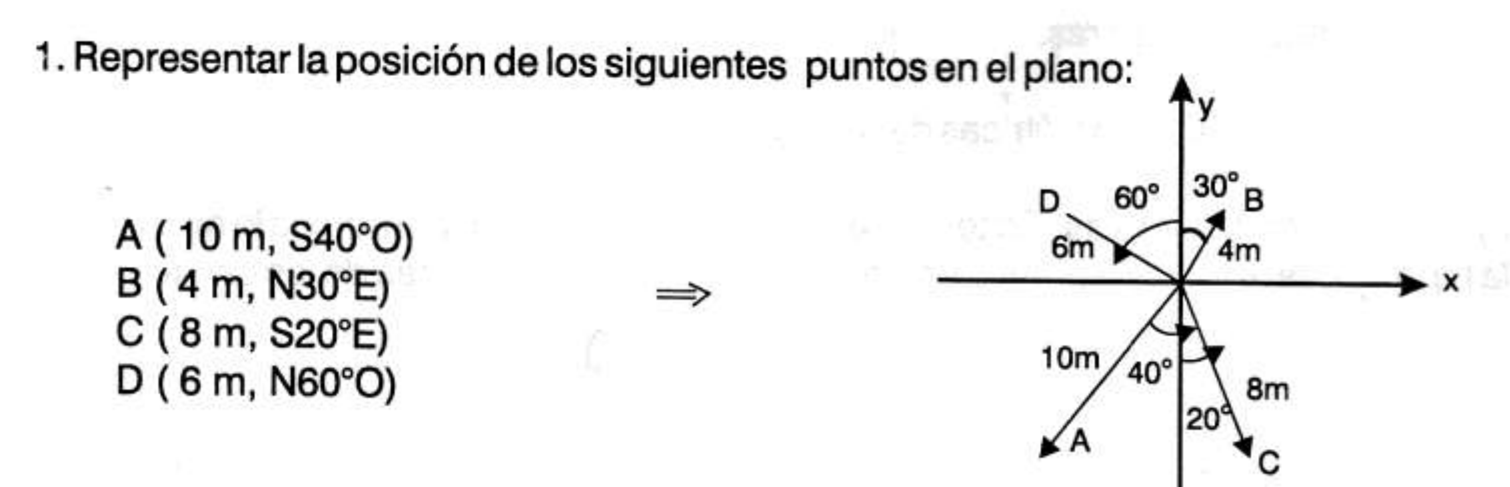
El eje vertical representa el Norte (N) hacia arriba del origen, y el Sur (S) hacia abajo del origen.

La posición de un punto en el plano queda determinada por un par ordenado (r, rumbo), donde ***r*** representa la distancia positiva del origen hasta el punto, y ***rumbo*** representa la dirección medida a partir del Norte o Sur. Para representar el rumbo, primero se menciona la palabra Norte o Sur - la que corresponda-, luego el ángulo agudo y finalmente la posición Este u Oeste. Ejemplos:

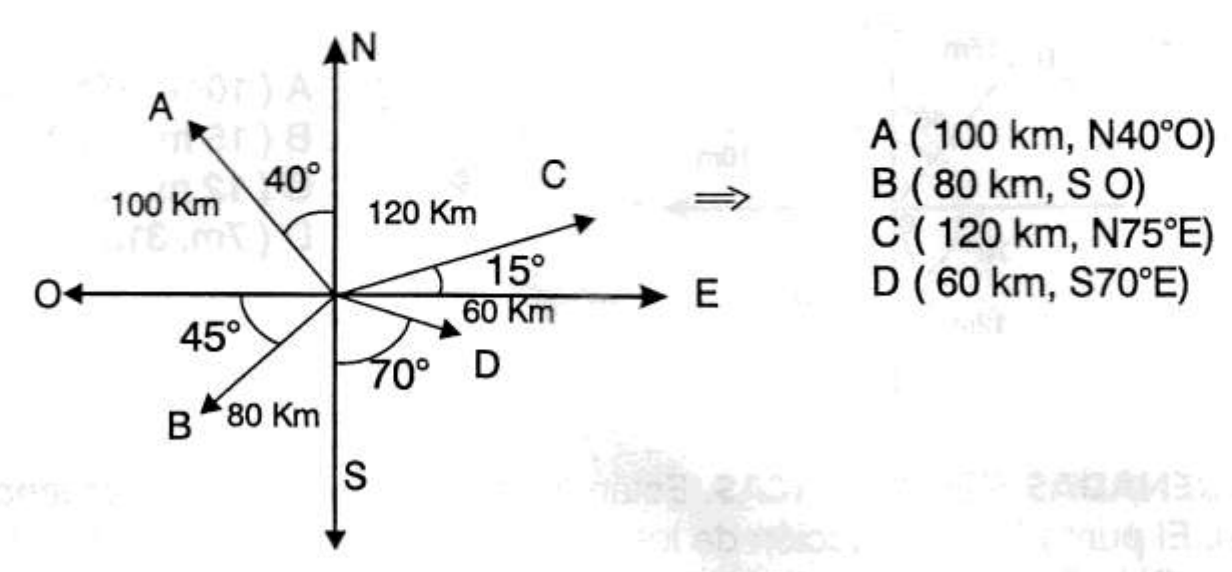
1. Representar la posición de los siguientes puntos en el plano:

A (10 m, S40°O)
B (4 m, N30°E)
C (8 m, S20°E)
D (6 m, N60°O)

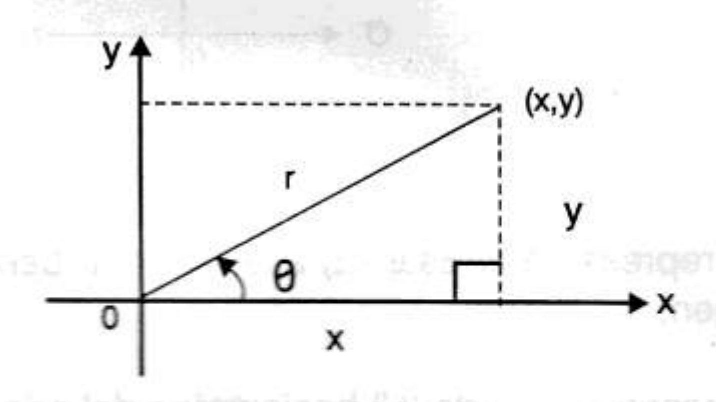
⟹



2. Determinar qué coordenadas geográficas representan los siguientes puntos:



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS. Un triángulo rectángulo está compuesto de seis elementos: tres lados, dos ángulos agudos y un ángulo recto. La suma de los ángulos agudos es 90°.



En la resolución de un triángulo es necesario conocer tres de los seis elementos que lo componen, siempre que al menos uno de ellos sea un lado.

Para la resolución de triángulos rectángulos se aplica:

a) El Teorema de Pitágoras.

b) Las funciones trigonométricas de un ángulo agudo.

a) Teorema de Pitágoras. En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos:

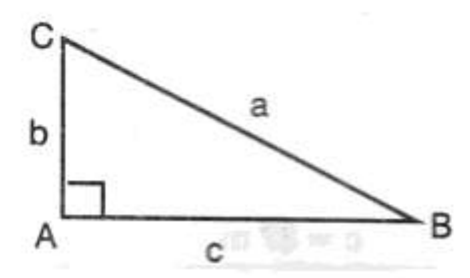
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

b) Principales funciones trigonométricas. En todo triángulo rectángulo las principales funciones trigonométricas de un ángulo agudo son:

FUNCIÓN	SÍMBOLO	COORDENADAS RECTANGULARES	TRIÁNGULO RECTÁNGULO	FÓRMULA
Seno	$\text{sen}\,\theta$	$\dfrac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}}$	$\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\dfrac{y}{r}$
Coseno	$\cos\theta$	$\dfrac{\text{abscisa}}{\text{radio vector}}$	$\dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\dfrac{x}{r}$
Tangente	$\tan\theta$	$\dfrac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}$	$\dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\dfrac{y}{x}$

EJEMPLOS

1. En el triángulo rectángulo ABC, determinar:



a) B en términos de a, b:

$$\text{sen } B = \frac{b}{a}$$

b) b en términos de a, c:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

c) a en términos de c, C:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a}$$

$$a = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

d) C en términos de b, c:

$$\tan C = \frac{c}{b}$$

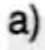
e) b en términos de c, B:

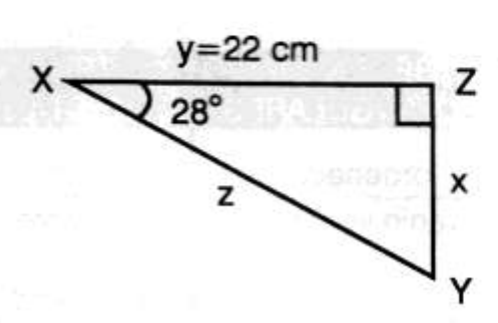
$$\tan B = \frac{b}{c}$$
$$b = c.\tan B$$

f) c en términos de a, C:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a}$$
$$c = a.\text{ sen } C$$

2. Resolver los triángulos rectángulos:


a)



$\cos 28° = \dfrac{22 \text{ cm}}{z}$

$z = \dfrac{22 \text{ cm}}{\cos 28°}$

$z = 24.971 \text{ cm}$

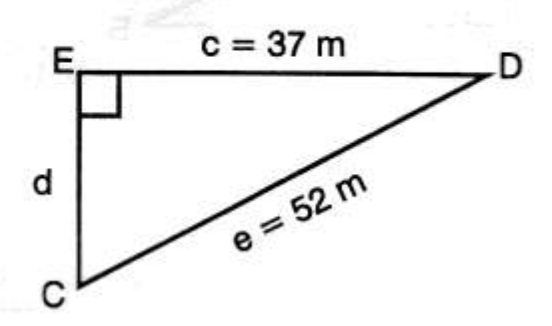
$\tan 28° = \dfrac{x}{22 \text{ cm}}$

$x = 22 \text{ cm}.\tan 28°$

$x = 11.698 \text{ cm}$

$X + Y = 90°$
$Y = 90° - X$
$Y = 62°$

b)



$e^2 = d^2 + c^2$
$d^2 = e^2 - c^2$
$d^2 = (52m)^2 - (37m)^2$
$d^2 = 2704 \text{ m}^2 - 1369 \text{m}^2$
$d^2 = 1335 \text{ m}^2$
$d = 36{,}538 \text{m}$

$\text{sen } C = \dfrac{37\text{m}}{52 \text{ m}}$

$C = 45{,}36°$

$\cos D = \dfrac{37\text{m}}{52 \text{ m}}$

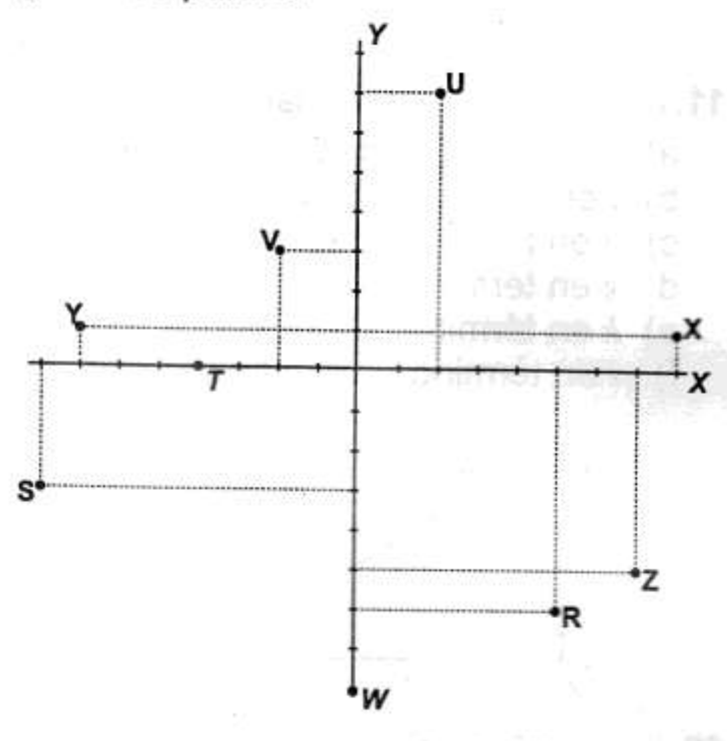
$D = 44{,}64°$

EJERCICIO N° 1

1. Representar las siguientes coordenadas rectangulares en el plano:

A. (-4,3) D. (0,6) G. (-2,-5)
B. (1,-8) E. (5,0) H. (8,-4)
C. (-7,-2) F. (3,4) I. (-1,7)

2. Determinar las coordenadas rectangulares que corresponden a los siguientes puntos:



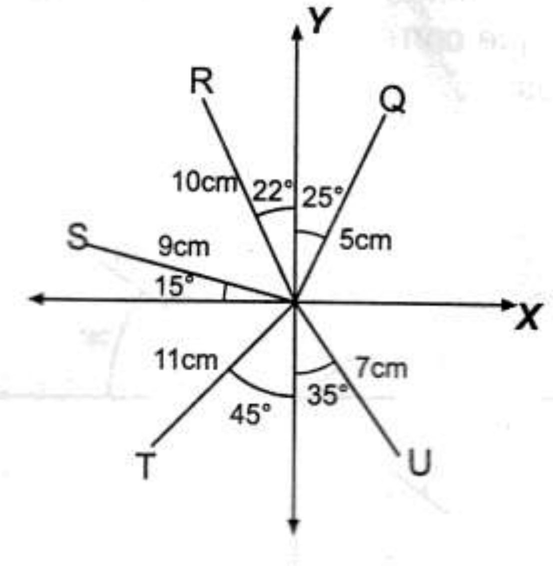
3. Sin necesidad de graficar, indicar en qué cuadrante está situado cada uno de los puntos siguientes:

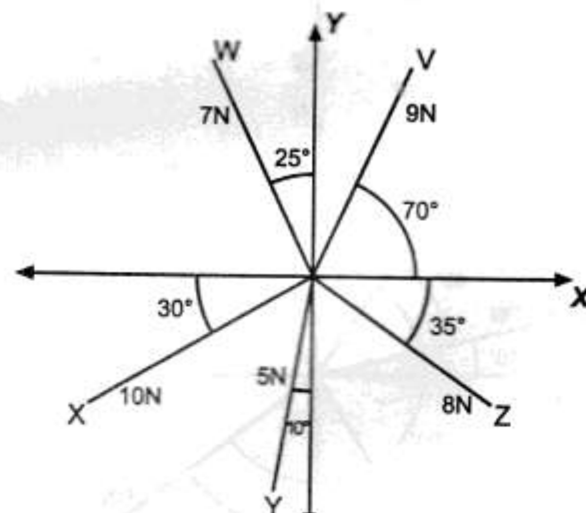
R. (12,5) U. (-1,8) X. (-11,-6)
S. (-7,4) V. (-2,-7) Y. (9,-4)
T. (4,-2) W. (10,3) Z. (-4,9)

4. Representar las siguientes coordenadas polares en el plano:

R. (40cm, 75°) W. (10N, 200°)
S. (20cm, 290°) X. (35m, 45°)
T. (30cm, 180°) Y. (50m, 245°)
U. (15N, 110°) Z. (50m, 90°)
V. (25N, 330°)

5. Determinar las coordenadas polares que correspondan a los siguientes puntos:





6. Sin necesidad de graficar, indicar en qué cuadrante está situado cada uno de los puntos siguientes:

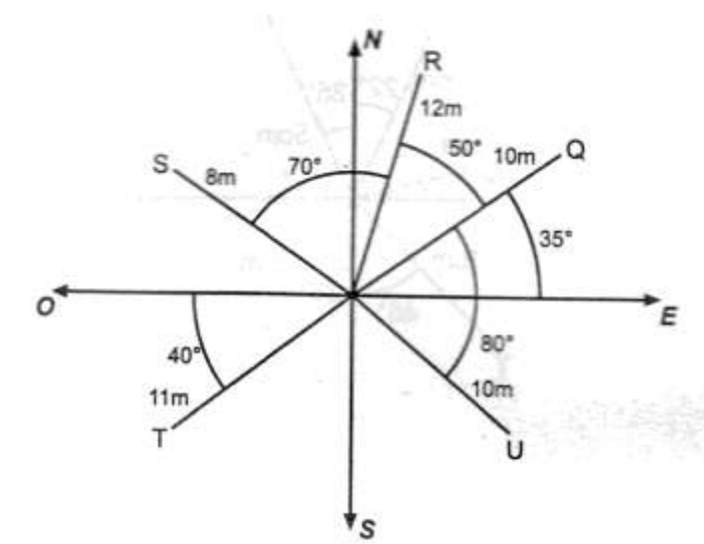
R. (90m, 119°) W. (56N, 94°)
S. (35m, 213°) X (91N, 272°)
T. (87m, 300°) Y. (113N, 89°)
U. (47m, 25°) Z. (83N, 165°)
V. (63N, 192°)

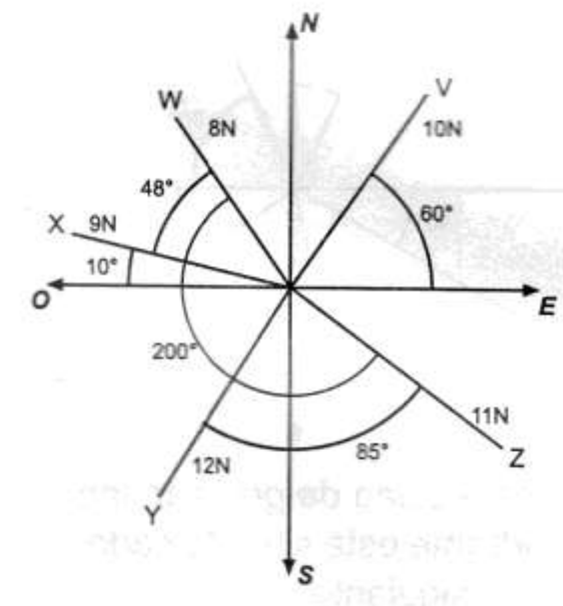
7. Representar las siguientes coordenadas geográficas en el plano:

R. (12m, SE) U. (7m, S55°O)
S. (8m, N12°O) V. (9m, N80°O)
T. (10m, N35°E) W. (10cm, N)

X. (11cm, S10°E) Z. (7cm, S15°O)
Y. (8cm, S)

8. Determinar las coordenadas geográficas que corresponden a los siguientes puntos:



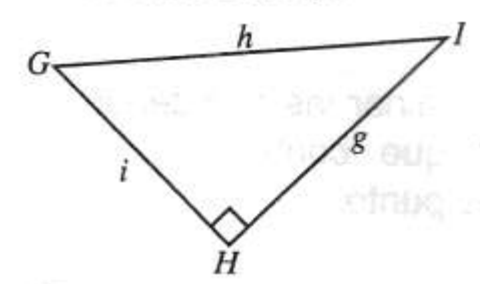


9. Sin necesidad de graficar, indicar en qué cuadrante está situado cada uno de los puntos siguientes:

R. (70km, SE) W. (29m, S10°O)
S. (45km, N23°O) X. (75m, N73°O)
T. (60km, S80°O) Y. (40cm, N80°E)
U. (55km, N20°E) Z (89cm, NE)
V. (80m, S35°E)

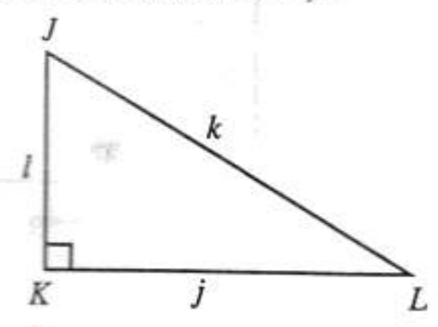
10. En el triángulo GHI, hallar:

a) g en términos de I,h
b) i en términos de h,g
c) G en términos de i,g
d) h en términos de G,g
e) i en términos de G,h
f) I en términos de i,h



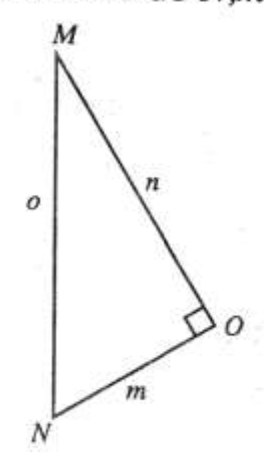
11. En el triángulo JKL, hallar:

a) j en términos de L,l
b) l en terminis de J,k
c) J en términos de j,l
d) k en términos de j,l
e) k en términos de j,L
f) l en términos de k,L



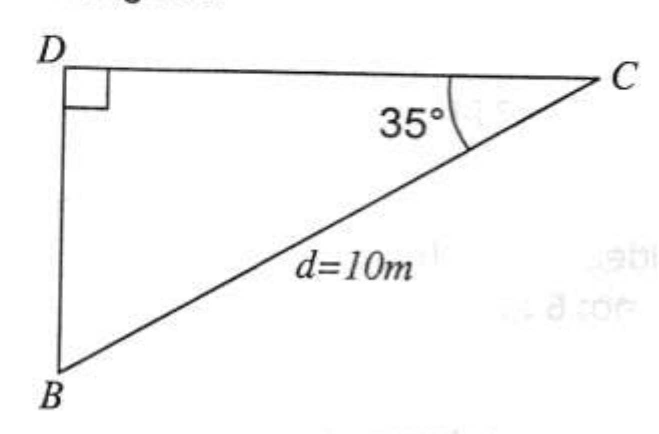
12. En el triángulo MNO, hallar:

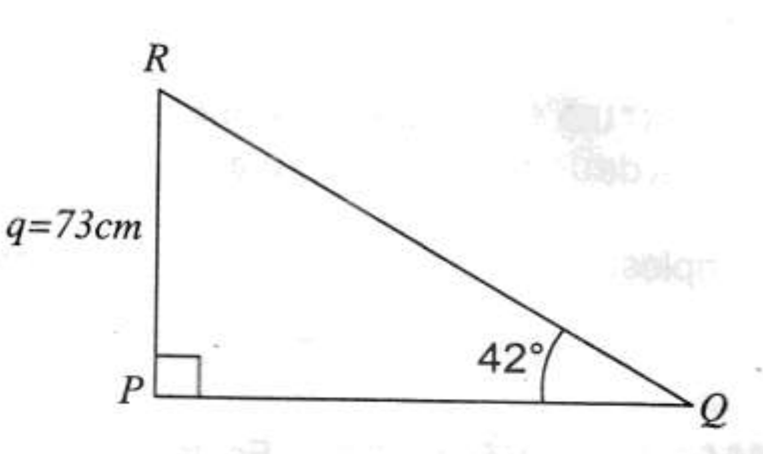
a) M en términos de o,m
b) N en términos de o,m
c) n en términos de o,m
d) m en términos de M,n
e) o en términos de N,n
f) o en términos de N,m

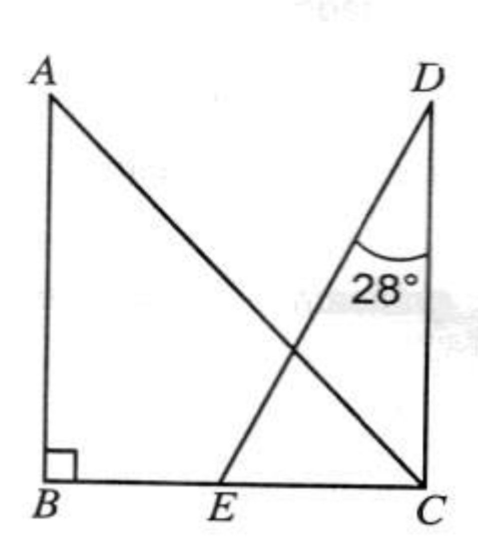


EJERCICIO N° 1

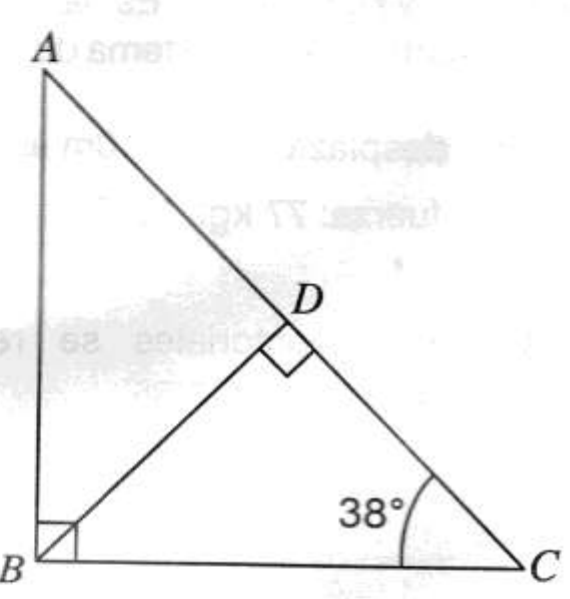
13. Resolver los siguientes triángulos rectángulos:



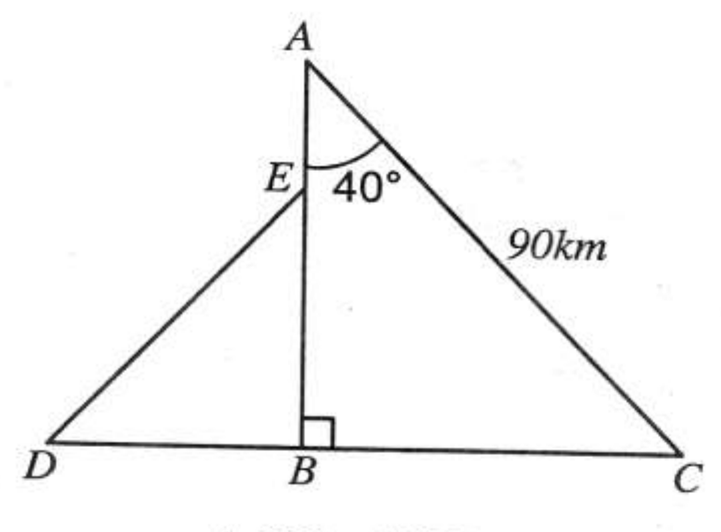




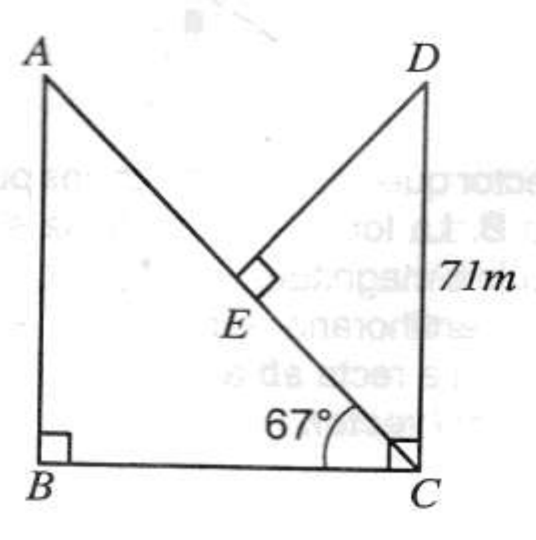
Δ ABC y ΔECD
Si AB = DC y 2EC = BC = 47cm



Δ ABC y ΔBCD
Si AB = 53cm



Δ ABC y ΔEDB
Si EB = $\frac{2}{3}$ AB = DB



Δ ABC y ΔEDC
Si EC = $\frac{AC}{2}$

1.3 VECTORES EN EL PLANO

En Física, de manera general, se emplean dos tipos de magnitudes: la escalar y la vectorial.

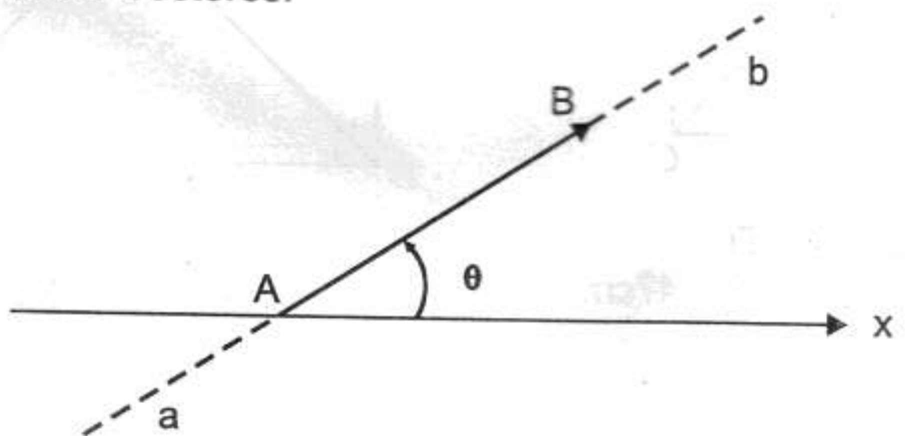
MAGNITUD ESCALAR. Es la que se define solamente por su valor numérico en un sistema de unidades seleccionado.

Ejemplos: longitud: 10 m; masa: 72 kg; rapidez: 60 km/h; tiempo: 8 seg

MAGNITUD VECTORIAL. Es la que se define mediante su valor numérico, dirección y sentido, en un sistema de unidades seleccionado.

Ejemplos: desplazamiento: 10m al norte; fuerza: 77 kgf, 125°; velocidad: 6Okm/h, S70° 0; aceleración: $(-4\vec{i} + 6\vec{j})m/s^2$

Las magnitudes vectoriales se representan gráficamente con segmentos orientados, llamados vectores:



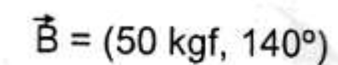
Un vector queda definido por dos puntos: su origen, en el punto ***A***; y el extremo en el punto **B**. La longitud representa en una escala seleccionada su ***valor numérico*** (módulo o magnitud). El ángulo que forma el vector con el eje de referencia (x) en el sentido antihorario, representa la ***dirección***, y la saeta del vector representa el ***sentido***. La recta ***ab*** a lo largo de la cual está dirigida el vector, se llama ***línea de acción del vector.***

Los vectores se representan con una letra mayúscula y una flechita en la parte superior ($\vec{A}$). El módulo del vector se representa con la misma letra, pero sin la flecha (A).

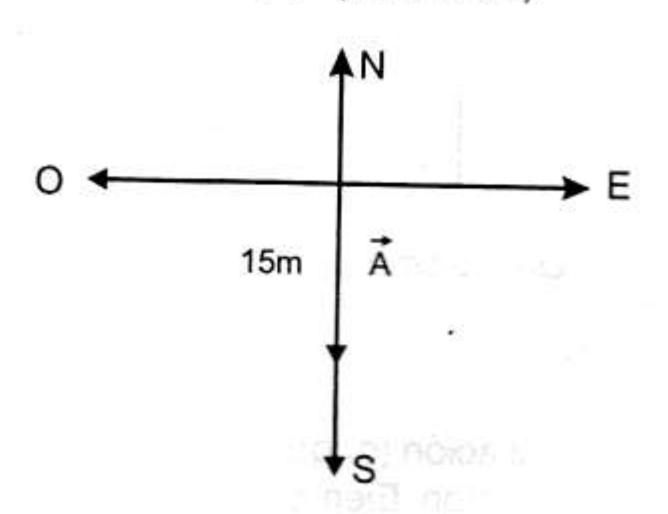
EJEMPLOS

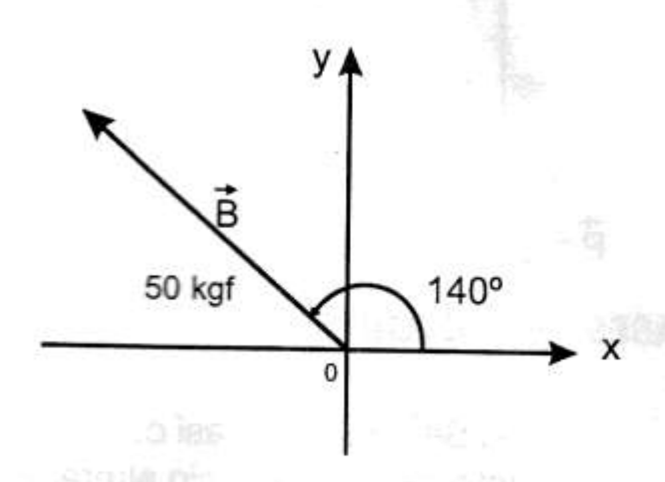
1. Representar gráficamente los siguientes vectores:

$\vec{A}$ = (15m al sur)



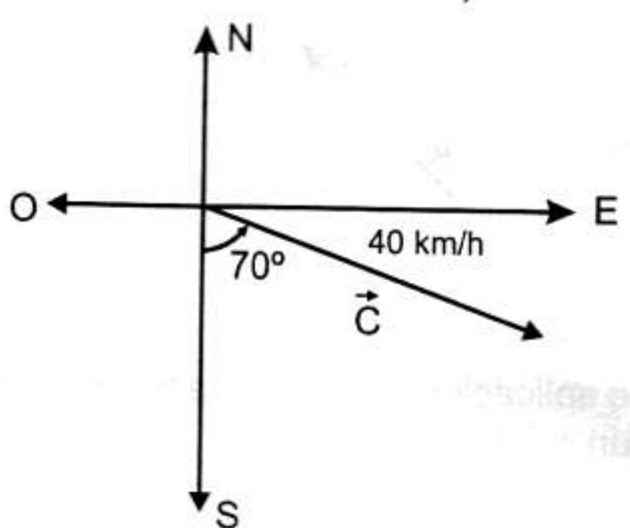
$\vec{B}$ = (50 kgf, 140º)

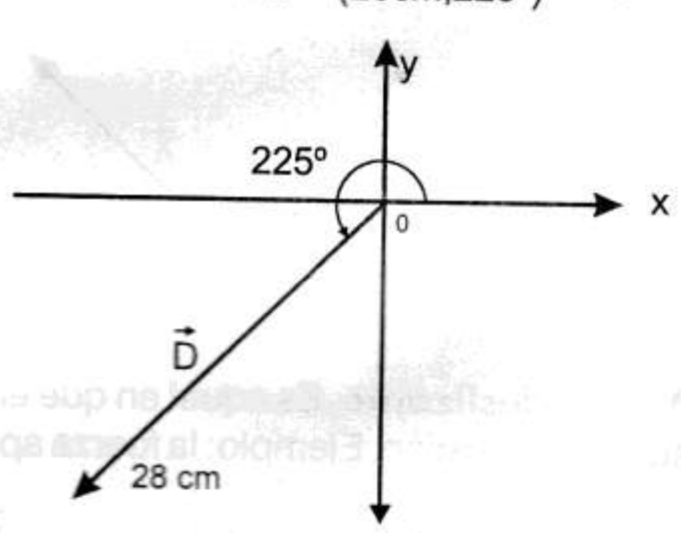




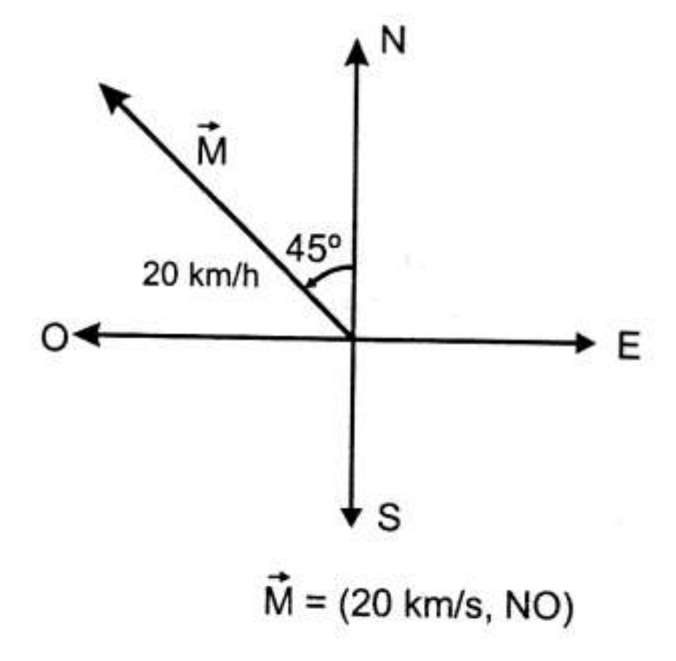
$\vec{C}$ =(40 km/h, S70ºE)

$\vec{D}$ = (28cm;225º)

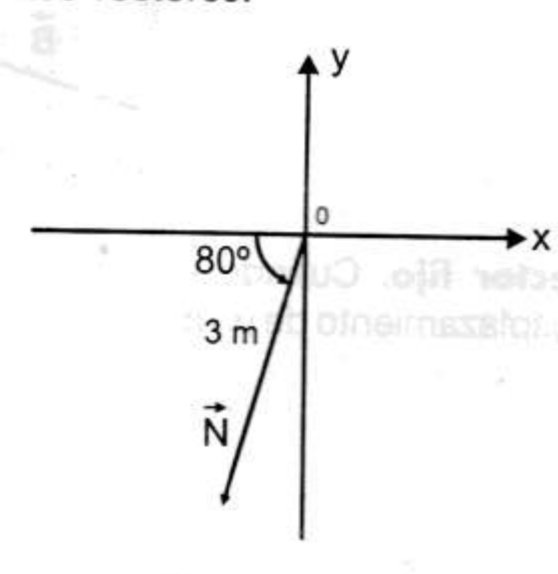




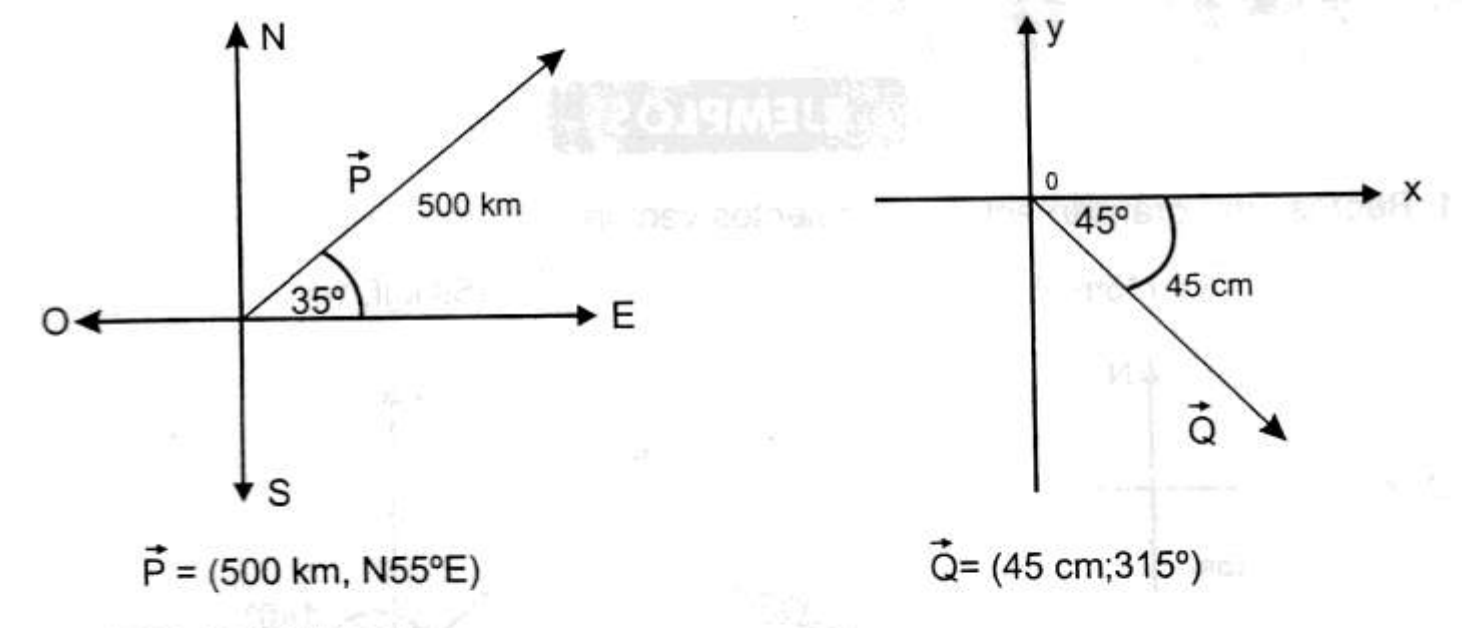
2. Determinar el módulo y dirección de los siguientes vectores:



$\vec{M}$ = (20 km/s, NO)



$\vec{N}$ = (3m, 260º)



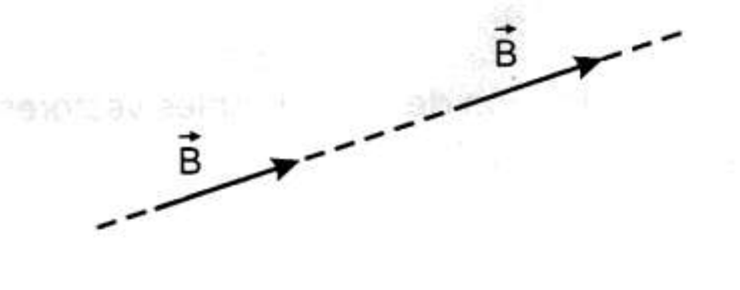
$\vec{P}$ = (500 km, N55ºE)

$\vec{Q}$= (45 cm;315º)

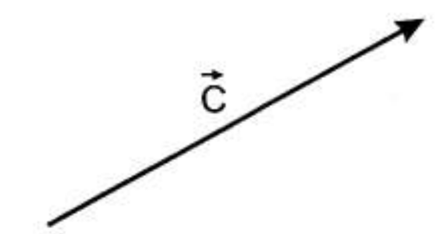
CLASES DE VECTORES

Vector libre. Se denomina así cuando el punto de aplicación (origen) se traslada a cualquier punto del espacio, sin alterar el efecto de su acción. Ejemplo: la velocidad de propagación de la luz en el vacío.

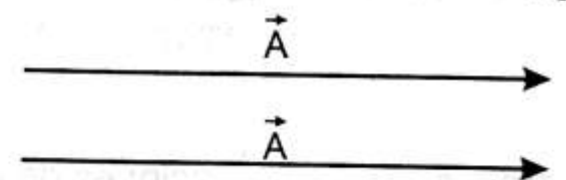
Vector deslizante. Es aquel en que el punto de aplicación se traslada a lo largo de su línea de acción. Ejemplo: la fuerza aplicada a un sólido rígido.



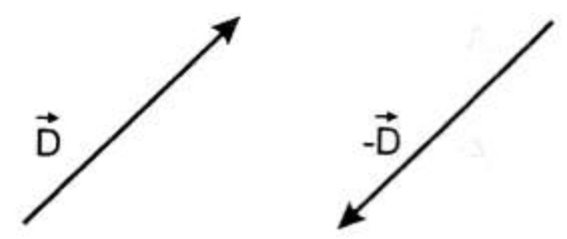
Vector fijo. Cuando el punto de aplicación no tiene movimiento. Ejemplos: el desplazamiento de un móvil, la intensidad del campo gravitatorio en un punto dado.



Vectores iguales. Se llaman así si tienen la misma magnitud, dirección y sentido.



Vector negativo (opuesto de otro dado). Si tiene la misma magnitud, la misma dirección, pero sentido opuesto.



Vectores equivalentes. Son aquellos que, sin ser iguales, producen el mismo efecto. Ejemplo: una fuerza pequeña ubicada a gran distancia del centro en una balanza de brazos, equilibra a una fuerza grande ubicada a corta distancia.

Vector unitario. Es aquel cuyo módulo es igual a la unidad, y se obtiene dividiendo el vector por su módulo.

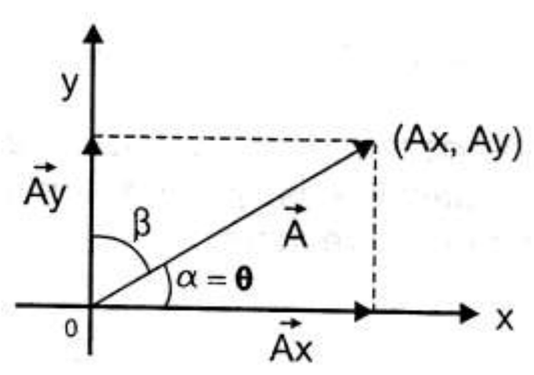
$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} \Longrightarrow \vec{A} = A.\vec{u}_A \qquad (1.3.1)$$

El vector unitario ($\vec{u}_A$)tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{A}$ y no tiene unidades.

Vector nulo. Es aquel en el cual el origen y extremo coinciden en un mismo punto. En este caso, su módulo es igual a cero y carece de dirección y sentido.

DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN EL PLANO

Si se coloca el punto inicial del vector $\vec{A}$ en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, entonces el vector $\vec{A}$ queda determinado por las coordenadas rectangulares (Ax, Ay) del punto final:



En consecuencia, un vector en el plano se define con un par ordenado $\vec{A}$ (Ax, Ay), donde ***Ax*** y ***Ay*** se llaman componentes del vector $\vec{A}$ con respecto al sistema de coordenadas dado. **(1.3.2)**

*Las **componentes de un vector*** son las proyecciones de dicho vector sobre los ejes de coordenadas.

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{Ax}{A} \Rightarrow Ax = A.\cos\alpha \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

$$\text{Sen}\ \alpha = \frac{Ay}{A} \Rightarrow Ay = A.\text{sen}\ \alpha \qquad \textbf{(1.3.4)}$$

Todo vector se expresa como la suma vectorial de sus componentes.

$$\vec{A} = \vec{A}x + \vec{A}y \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

Existen infinidad de sistemas coordenados posibles, de modo que un mismo vector tiene diferentes componentes en diferentes sistemas.

De la figura de la página anterior se deduce:

a) Que la magnitud de un vector en función de sus componentes es:

$$A^2 = Ax^2 + Ay^2 \qquad \textbf{(1.3.6)}$$

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

b) Que la dirección de un vector en función de sus componentes, con respecto al eje x positivo es:

$$\tan\theta = \frac{Ay}{Ax} \qquad \textbf{(1.3.7)}$$

De esta manera, se deduce que un vector queda determinado de dos modos:

a) Conociendo sus dos componentes.

b) Conociendo el módulo y un ángulo con relación a un eje cualquiera.

Ángulos Directores. Son aquellos que forman el vector con los ejes positivos x e y del sistema de coordenadas rectangulares, y varían entre 0° y 180°. No existe convención para el giro de los ángulos directores.

Los ángulos directores en el plano son:

α es el que forma el vector con el eje positivo de las ***x***.
β es el que forma el vector con el eje positivo de las ***y***.

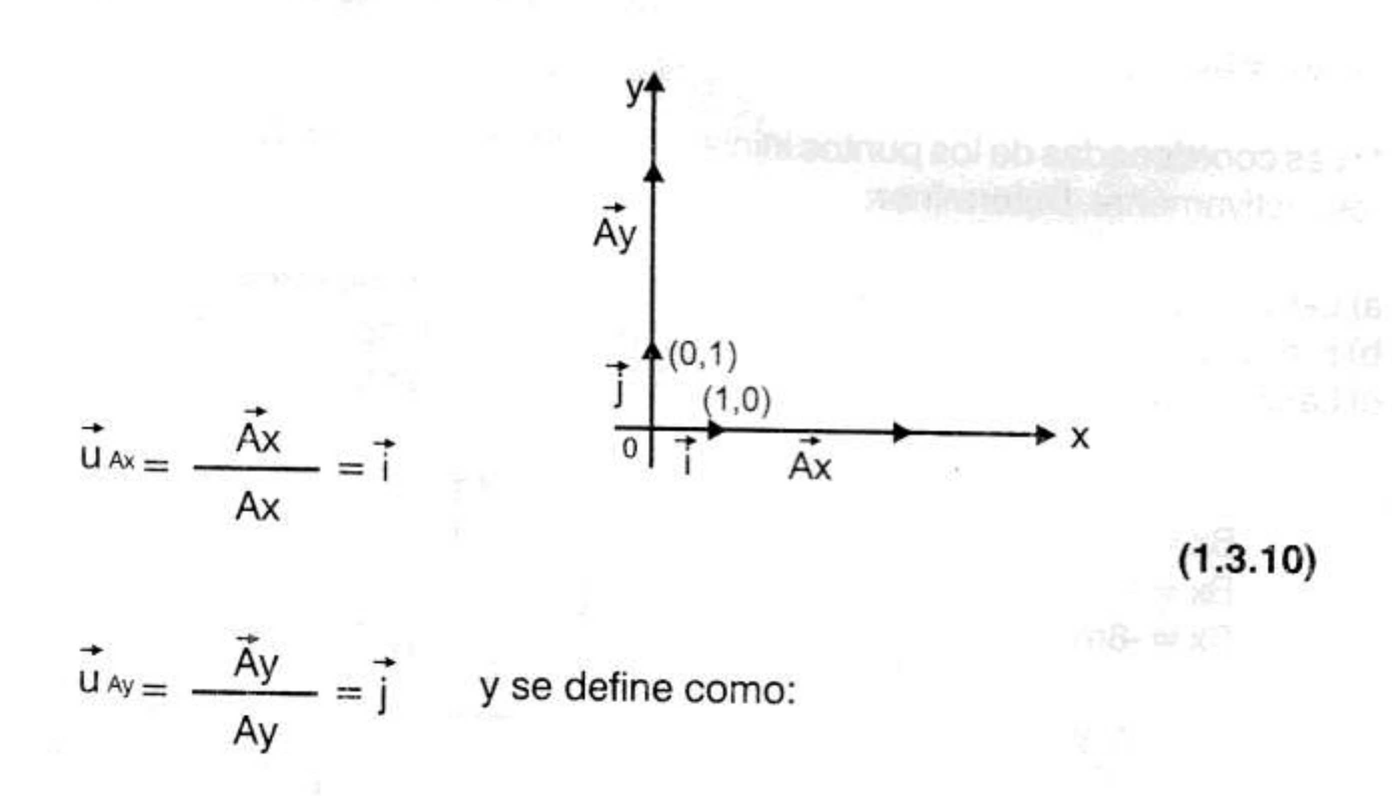
La relación entre componentes y el módulo del vector, se llama ***coseno director***.

$$\cos\ \alpha = \frac{Ax}{A} \qquad\qquad \cos\ \beta = \frac{Ay}{A} \tag{1.3.8}$$

Teniendo en cuenta **(1.3.6)** y **(1.3.8)**, se deduce:

$$A^2 = Ax^2 + Ay^2$$
$$A^2 = A^2.\cos^2\alpha + A^2.\cos^2\beta$$
$$A^2 = A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta\ )$$
$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta \tag{1.3.9}$$

Vectores base o unitarios normalizados los vectores unitarios rectangulares del sistema coordenado rectangular son:



$$\vec{u}_{Ax} = \frac{\vec{A}x}{Ax} = \vec{i} \tag{1.3.10}$$

$$\vec{u}_{Ay} = \frac{\vec{A}y}{Ay} = \vec{j}$$ y se define como:

(1.3.11)

$\vec{i}$ es el vector unitario en la dirección positiva del eje ***x***.

$\vec{j}$ es el vector unitario en la dirección positiva del eje **y**.

De acuerdo con **(1.3.5)**, **(1.3.10)** y **(1.3.11)** se deduce la expresión de un vector en función de sus vectores unitarios rectangulares.

$$\vec{A} = \vec{A}x + \vec{A}y$$

$$\vec{A} = Ax\vec{i} + Ay\vec{j} \qquad (1.3.12)$$

Aplicando **(1.3.1)** Y **(1.3.12)**, tenemos:

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

$$\vec{u}_A = \frac{Ax\vec{i} + Ay\vec{j}}{A}$$

Expresiones de un Vector 35

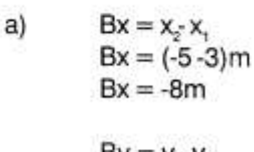
$$\vec{u}_A = \frac{Ax}{A}\vec{i} + \frac{Ay}{A}\vec{j}$$

$$\vec{u}_A = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} \qquad (1.3.13)$$

Lo que nos permite concluir que todo vector unitario indica la dirección y el sentido de un vector. Ejemplos:

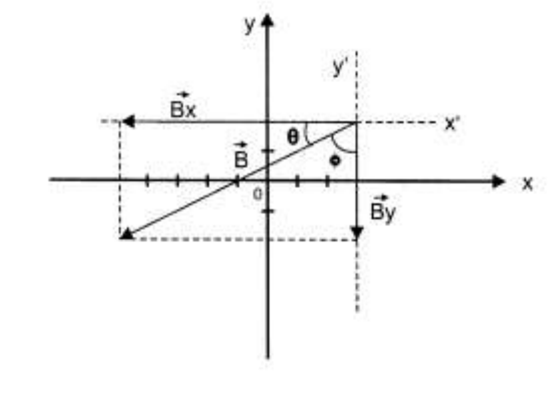
1. Las coordenadas de los puntos inicial y final del vector $\vec{B}$ son (3, 2)m y (-5, -2)m respectivamente. Determinar:

a) Las componentes del vector.
b) El módulo.
c) La dirección (rumbo).
d) Los ángulos directores.
e) El vector en función de los vectores base.
f) El vector unitario.



a) $Bx = x_2 - x_1$
$Bx = (-5 - 3)m$
$Bx = -8m$

$By = y_2 - y_1$
$By = (-2 - 2)m$
$By = -4m$



b) $B_2^2 = Bx^2 + By^2$
$B^2 = (-8)^2 + (-4)^2$
$B = 8{,}94\ m$

c) $\tan\theta = \dfrac{By}{Bx}$

$\tan\theta = \dfrac{-4m}{-8m}$

$\theta = 26{,}56°$
$\phi = 90° - 26{,}56$
$\phi = 63{,}43°$
S63,43°O

d) $\cos\alpha = \dfrac{Bx}{B}$

$\cos\alpha = \dfrac{-8\ m}{8{,}94m} \Rightarrow \alpha = 153{,}49°$

$\cos\beta = \dfrac{By}{B}$

$\cos\beta = \dfrac{-4m}{8{,}94m} \Rightarrow \beta = 116{,}57°$

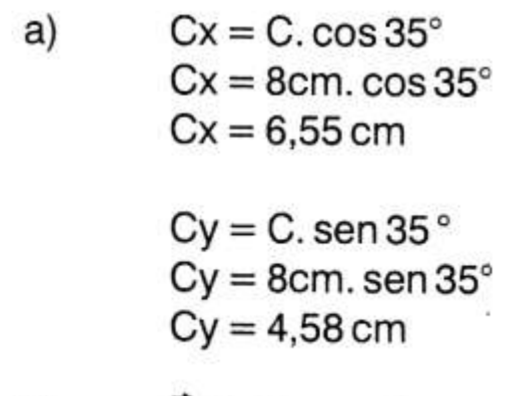
e) $\vec{B} = Bx\,\vec{i} + By\,\vec{j}$
$\vec{B} = (-8\,\vec{i} - 4\,\vec{j})m$

f) $\vec{u}_B = \dfrac{\vec{B}}{B} = \dfrac{(-8\,\vec{i} - 4\,\vec{j})m}{8{,}94\ m}$

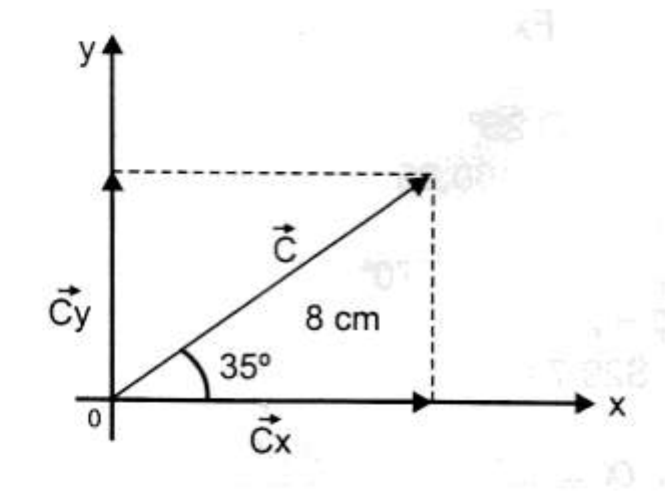
$\vec{u}_B = -0{,}895\,\vec{i} - 0{,}447\,\vec{j}$

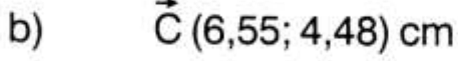
2. La magnitud de un vector $\vec{C}$ es 8 cm, y forma un ángulo de 35° con el sentido positivo del eje **x**. Determinar:

a) Las componentes del vector.
b) La coordenadas del vector.
c) Los ángulos directores.
d) El vector en función de los vectores base.
e) El vector unitario.


a) $Cx = C.\cos 35°$
$Cx = 8cm.\cos 35°$
$Cx = 6{,}55\ cm$

$Cy = C.\,\text{sen}\,35°$
$Cy = 8cm.\,\text{sen}\,35°$
$Cy = 4{,}58\ cm$




b) $\vec{C}\,(6{,}55; 4{,}48)\ cm$

c) $\cos\alpha = \dfrac{Cx}{C} = \dfrac{6{,}55\ cm}{8\ cm} \Rightarrow \alpha = 35°$

$$\cos\beta = \frac{C_y}{C} = \frac{4{,}58\text{cm}}{8\text{ cm}} \Rightarrow \beta = 55^\circ$$

d) $\vec{C} = C_x\,\vec{i} + C_y\,\vec{j}$
$\vec{C} = 6{,}55\,\vec{i} + 4{,}58\,\vec{j}$

e) $\vec{u}_C = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}$
$\vec{u}_C = \cos 35^\circ\,\vec{i} + \cos 55^\circ\,\vec{j}$
$\vec{u}_C = 0{,}819\,\vec{i} + 0{,}573\,\vec{j}$

3. Dado el vector $\vec{F} = (4\,i - 7\,\vec{j})$ kgf, determinar:

a) Las componentes rectangulares del vector.
b) Las coordenadas del punto extremo del vector.
c) El módulo del vector.
d) La dirección.
e) Los ángulos directores.
f) El vector unitario.

a) $F_x = 4\text{kgf}$
$F_y = -7\text{kgf}$

b) $\vec{F}\,(4, -7)$ kgf

c) $F^2 = F_x^2 + F_y^2$
$F^2 = (4\text{kgf})^2 + (-7\text{kgf})^2$
$F = 8{,}06\text{kgf}$

d) $\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-7\text{kgf}}{4\text{kgf}}$

$\theta = -60{,}25^\circ$
$\theta = 360^\circ - 60{,}25^\circ$
$\theta = 299{,}74^\circ$
$\phi = 299{,}74^\circ - 270^\circ$
$\phi = 29{,}74^\circ$
S29,74°E

e) $\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{4\text{fgf}}{8{,}06\text{ kgf}} \Rightarrow \alpha = 60{,}24^\circ$

$\cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{-7\text{ kgf}}{8{,}06\text{ kgf}} \Rightarrow \beta = 150{,}28^\circ$

f) $\vec{u}_F = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{(4\,\vec{i} - 7\,\vec{j})\text{kgf}}{8{,}06\text{ kgf}} = 0{,}496\,\vec{i} - 0{,}868\text{ j}$

4. El módulo de un vector $\vec{G}$ es 12 km y su vector unitario $\vec{u}_G = 0{,}342\,\vec{i} - m\vec{j}$. Determinar:

a) El valor de m.
b) Los ángulos directores.
c) El vector en función de los vectores base.
d) Las componentes rectangulares del vector
e) Las coordenadas del punto extremo del vector.
f) La dirección.

a) $\vec{u}_G = 0{,}342\,\vec{i} - m\vec{j}$

$\vec{u}_G = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

$\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha$

$\cos^2\beta = 1 - (0{,}342)^2$

$\cos\beta = 0{,}940 = m$

$\vec{u}_G = 0{,}342\,\vec{i} - 0{,}940\,\vec{j}$

b) $\cos\alpha = 0{,}342$ $\quad$ $\cos\beta = -0{,}940$

$\alpha = 70°$ $\quad$ $\beta = 160°$

c) $\vec{G} = 12\text{km}\,(0{,}342\,\vec{i} - 0{,}940\,\vec{j})$

$\vec{G} = (4{,}10\,\vec{i} - 11{,}.28\,\vec{j}\,)\text{km}$

d) Gx= 4,10km
Gy= -11,28km

e) G=(4,10; -11,28)km

f) $\tan\theta = \dfrac{Gy}{Gx} = \dfrac{-11{,}28\text{ km}}{4{,}10\text{km}}$

$\theta = -70{,}03°$

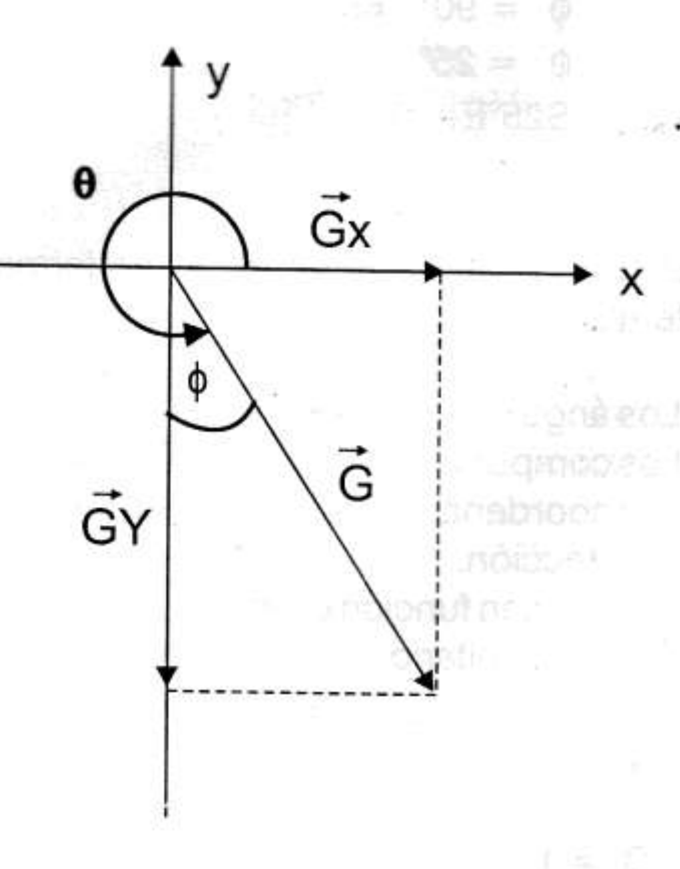
$\theta = 360° - 70{,}03°$

$\theta = 289{,}97°$

$\phi = 289{,}97° - 270°$

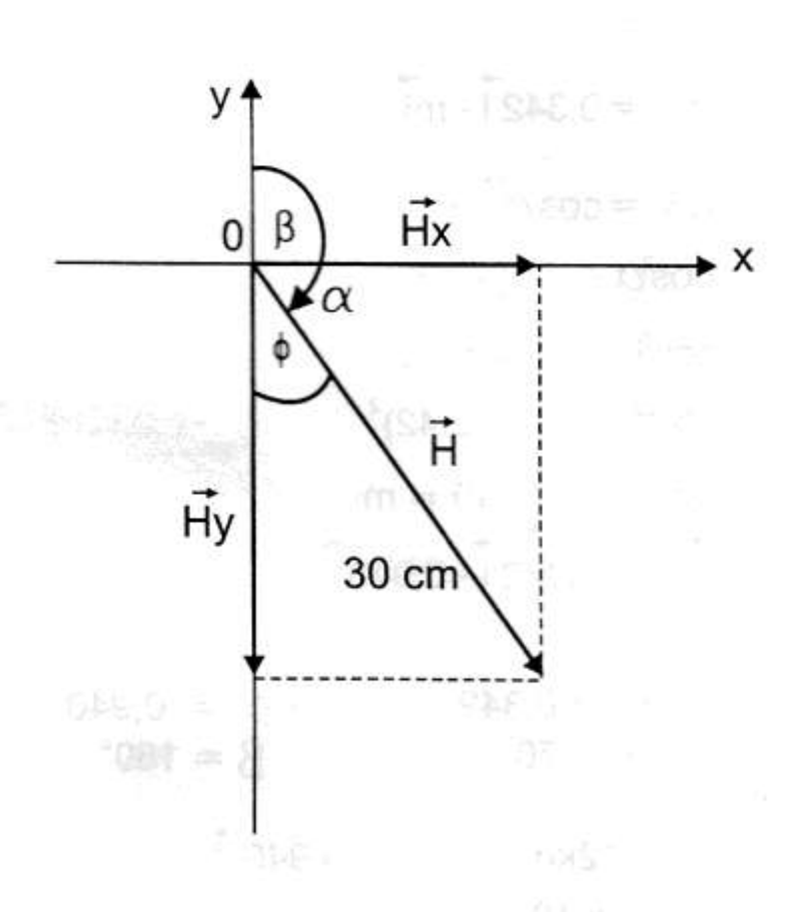
$\phi = 19{,}970°$

S19,97° E



5. El módulo de un vector $\vec{H}$ es 30m y tiene como ángulos directores $\alpha = 65°$ y $\beta = 155°$. Determinar:

a) El vector unitario.
b) El vector en función de los vectores base.
c) Las componentes rectangulares del vector.
d) Las coordenadas del punto extremo del vector.
e) La dirección.



a) $\vec{u}_H = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}$

$\vec{u}_H = \cos 65°\,\vec{i} + \cos 155°\,\vec{j}$

$\vec{u}_H = 0{,}423\,\vec{i} - 0{,}906\,\vec{j}$

b) $\vec{H} = 30m\,(0{,}423\,\vec{i} - 0{,}906\,\vec{j})$

$\vec{H} = (12{,}69\vec{i} - 27{,}18\vec{j})m$

c) $H_x = 12{,}69$ m

$H_y = -27{,}18$ m

d) $\vec{H} = (12{,}69; -27{,}18)m$

e) $\phi = 90° - 65°$

$\phi = 25°$

S25°E

6. El módulo del vector $\vec{J}$ es 17 cm, y forma un ángulo de 215° con el eje positivo de las **x**. Determinar:

a) Los ángulos directores.
b) Las componentes rectangulares del vector.
c) Las coordenadas del punto extremo del vector.
d) La dirección.
e) El vector en función de los vectores base.
f) El vector unitario.

a) $\alpha = 360° - 215°$ $\qquad$ $\beta = 215° - 90°$

$\alpha = 145°$ $\qquad$ $\beta = 125°$

b) $\cos \alpha = \dfrac{Jx}{J}$

$Jx = J.\ \cos \alpha$

$Jx = 17\text{ cm}.\cos 145°$

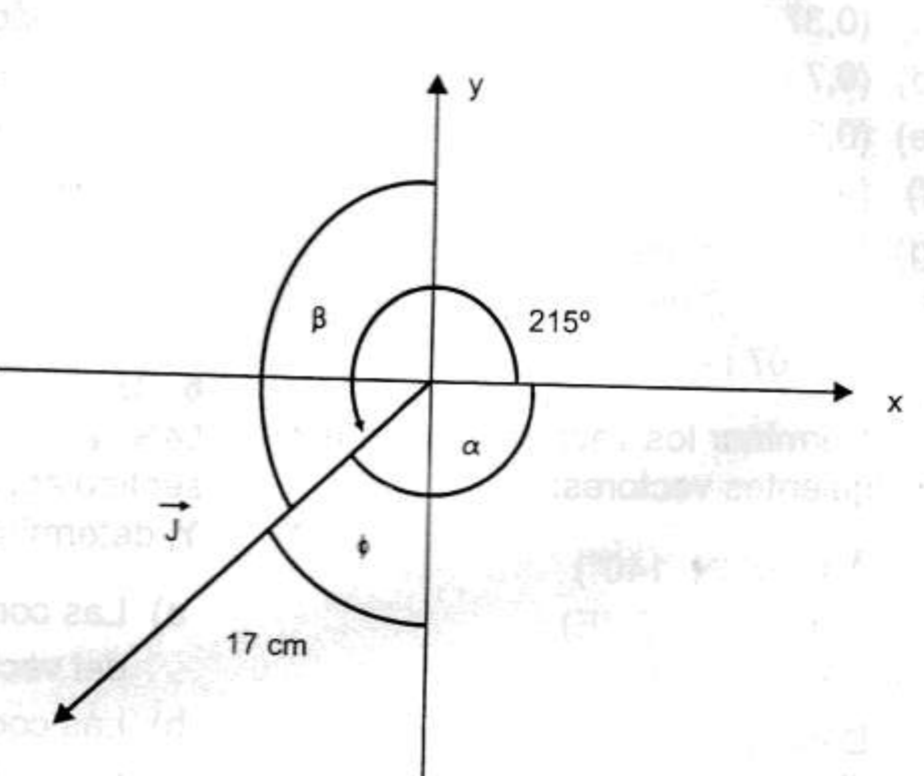
$Jx = -13{,}92\text{ cm}$

$\cos \beta = \dfrac{Jy}{J}$

$Jy = J.\ \cos \beta$

$Jy = 17\text{ cm}.\cos 125°$

$Jy = -9{,}75\text{ cm}$



c) $\vec{J}$ (-13,92; -9,75)cm

d) $\phi = \alpha - 90°$

$\phi = 55°$

S55° O

e) $\vec{J} = Jx\,\vec{i} + Jy\,\vec{j}$

$\vec{J} = (-13{,}92\,\vec{i} - 9{,}75\,\vec{j})\text{cm}$

f) $\vec{u}_J = \dfrac{\vec{J}}{J}$

$\vec{u}_J = \dfrac{(-13{,}92\,\vec{i} - 9{,}75\,\vec{j})\text{cm}}{17\text{ cm}}$

$\vec{u}_J = -0{,}819\,\vec{i} - 0{,}574\,\vec{j}$

EJERCICIO N°2

1. Determinar cuáles de los siguientes vectores son unitarios:

a) $(0{,}5\vec{i} + 0{,}5\vec{j})$
b) $(0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j})$
c) $(0{,}37\vec{i} - 0{,}929\vec{j})$
d) $(0{,}7\vec{i} - 0{,}55\vec{j})$
e) $(0{,}235\vec{i} - 0{,}972\vec{j})$
f) $(-0{,}3\vec{i} + 0{,}4\vec{j})$
g) $(-0{,}33\vec{i} - 0{,}943\vec{j})$
h) $(-0{,}5\vec{i} + 0{,}866\vec{j})$
i) $(-0{,}707\vec{i} - 0{,}707\vec{j})$

2. Determinar los vectores unitarios de los siguientes vectores:

a) $\vec{A}$ = (150N, 140°)
b) $\vec{B}$ = (27N, N37°E)
c) $\vec{C}$ = (45N, 225°)
d) $\vec{D} = (-9\vec{i} + 4\vec{j})$ N
e) $\vec{E}$ = (400N, S25°O)
f) $\vec{F} = (235\vec{i} - 520\vec{j})$m
g) $\vec{G}$ = (28m, S)
h) $\vec{H}$ = (40m, 335°)
i) $\vec{I}$ = (12m, NO)

3. Determinar los ángulos directores de los siguientes vectores:

R	$(-4\vec{i} + 8\vec{j})$m	W	(57N, 280°)
S	$(5\vec{i} - 9\vec{j})$m	X	(78N, N29°O)
T	$(-11\vec{i} - 7\vec{j})$m	Y	(45N, S72°E)
U	(120m, 120°)	Z	(20N, S45°O)
V	(45N, 229°)		

4. Determinar los vectores unitarios para los vectores opuestos a los descritos en el literal anterior.

5. Un vector $\vec{R}$ parte del origen y llega al punto (12,7) cm; determinar:

a) Las componentes rectangulares del vector $\vec{R}$
b) El módulo del vector $\vec{R}$
c) La dirección del vector $\vec{R}$
d) Los ángulos directores del vector $\vec{R}$
e) El vector en función de sus vectores base
f) El vector unitario

6. Un vector $\vec{S}$ cuya magnitud es de 54N y forma un ángulo de 213° en sentido antihorario con el eje positivo en ***Y***, determinar:

a) Las componentes rectangulares del vector $\vec{S}$
b) Las coordenadas del punto externo del vector $\vec{S}$
c) Los ángulos directores del vector $\vec{S}$
d) El vector en función de sus vectores base
e) El vector unitario

7. Si el ángulo director α de un vector $\vec{K}$ es 125°, y su componente en el eje ***X*** es de -37cm; determinar:

a) La componente en el eje ***Y***
b) El ángulo director β
c) El módulo del vector $\vec{K}$
d) El vector unitario
e) El vector en función de los vectores base
f) El punto extremo del vector

8. Para el vector $\vec{A} = (-34\vec{i} + 67\vec{j})$cm/s; determinar:

EJERCICIO N°2

a) Las componentes rectangulares del vector
b) El vector en coordenadas polares
c) El vector en coordenadas geográficas
d) El módulo del vector $\vec{A}$
e) Los ángulos directores del vector $\vec{A}$
f) El vector unitario

9. El rumbo de un vector $\vec{E}$ es S68°E y el valor de la componente en el eje ***X*** es 87N, determinar:

a) Los ángulos directores
b) La componente en el eje ***Y***
c) El módulo del vector $\vec{E}$
d) Las coordenadas en el punto extremo del vector
e) El vector unitario
f) Un vector $\vec{F}$ de dirección opuesta al vector $\vec{E}$, cuyo módulo es el mismo del vector $\vec{E}$

10. El módulo del vector $\vec{C}$ es 84m y su dirección esta dada por el vector unitario $\vec{Uc} = m\,\vec{i} + n\,\vec{j}$, el vector $\vec{C}$ esta en el primer cuadrante; determinar:

a) El valor de m y n, si n = 2m
b) Los ángulos directores del vector $\vec{C}$
c) El vector en función de los vectores base
d) Las componentes rectangulares del vector $\vec{C}$
e) Las coordenadas del punto extremo del vector $\vec{C}$
f) La dirección del vector $\vec{C}$
g) El vector unitario

11. La componente de un vector $\vec{B}$ en el eje ***X*** es -27cm, si sus ángulos directores son α=145° y β=125°, determinar:

a) La componente del vector en el eje ***Y***
b) El módulo del vector $\vec{B}$
c) Las coordenadas del punto extremo del vector $\vec{B}$
d) La dirección del vector $\vec{B}$
e) El vector en coordenadas polares
f) El vector unitario

12. La componente de un vector $\vec{J}$ en el eje ***Y*** es -45 km y el ángulo formado respecto al eje positivo de ***X*** es 207° en dirección antihoraria, determinar:

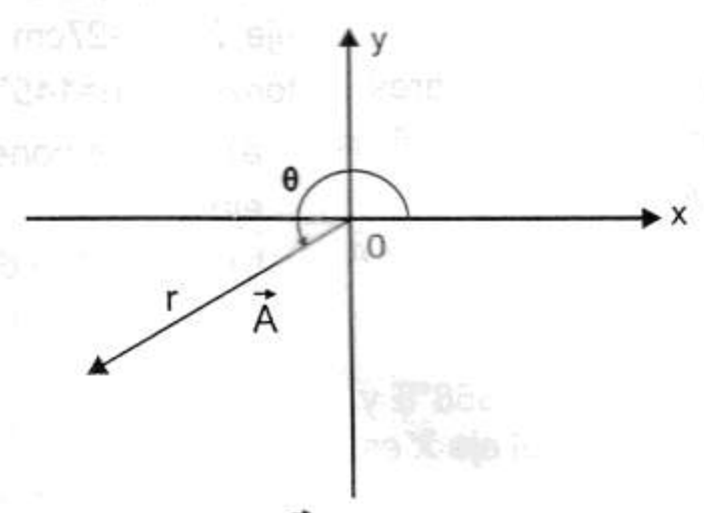
a) La componente del vector en el eje ***X***
b) Los ángulos directores
c) El módulo del vector $\vec{J}$
d) Las coordenadas del extremo del vector
e) El vector en función de sus componentes rectangulares
f) El vector unitario

13. El módulo de un vector $\vec{E}$ es 68cm y tiene como ángulos directores α=115° y β=25°; determinar:

a) La dirección
b) Las componentes rectangulares del vector
c) Las coordenadas del punto extremo del vector
d) El vector en función de los vectores base
c) El vector unitario

1.4 FORMAS DE EXPRESIÓN DE UN VECTOR Y TRANSFORMACIONES

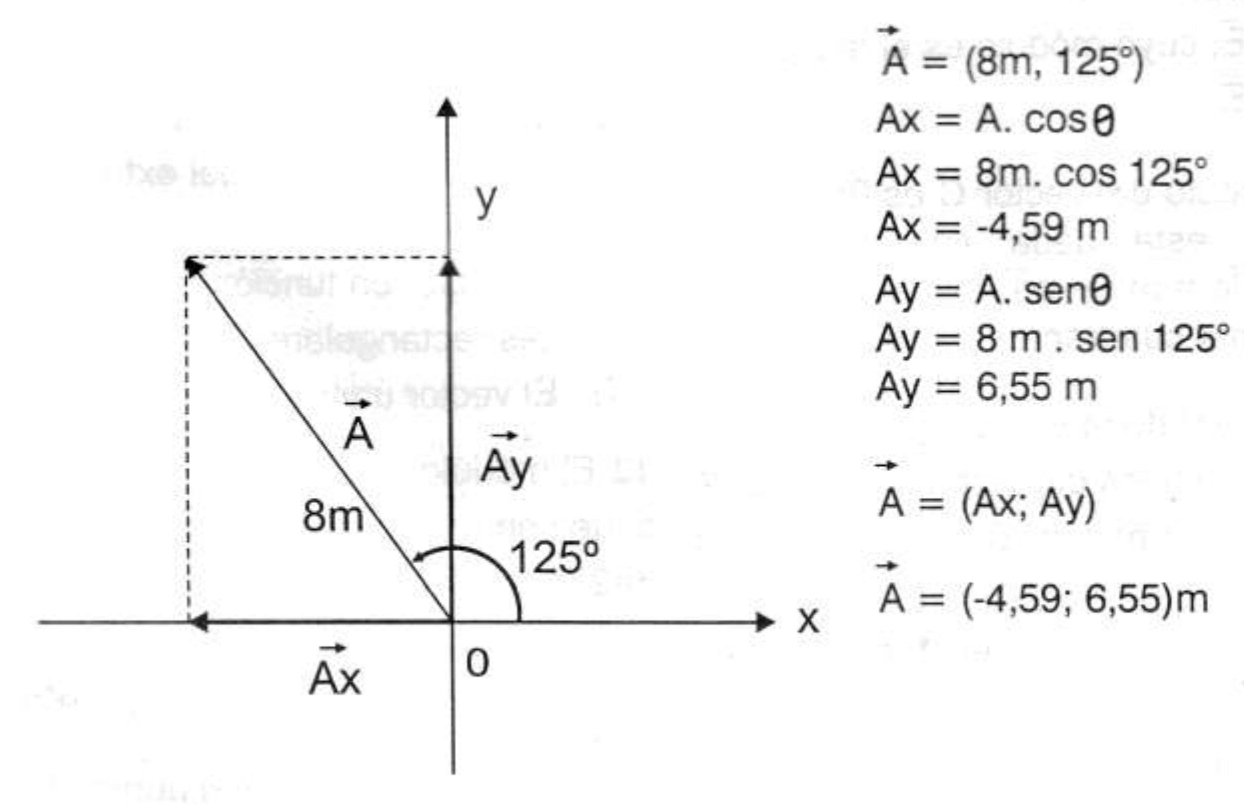
EN FUNCIÓN DE SU MÓDULO Y ÁNGULO:



Cuando en el plano se define un vector $\vec{A}$ con el par ordenado (r,θ), está expresado en coordenadas polares; ***r*** representa el módulo del vector y θ el ángulo medido desde el eje polar hasta el vector en sentido antihorario.

Ejemplo: $\vec{A}$ = (8m, 125°)

a) Conocidas las coordenadas polares de un vector, encontramos las coordenadas rectangulares ***(x, y)*** usando las ecuaciones **(1.3.3)** y **(1.3.4)**:



$\vec{A} = (8m, 125°)$

$Ax = A. \cos\theta$

$Ax = 8m. \cos 125°$

$Ax = -4,59\ m$

$Ay = A. \text{sen}\theta$

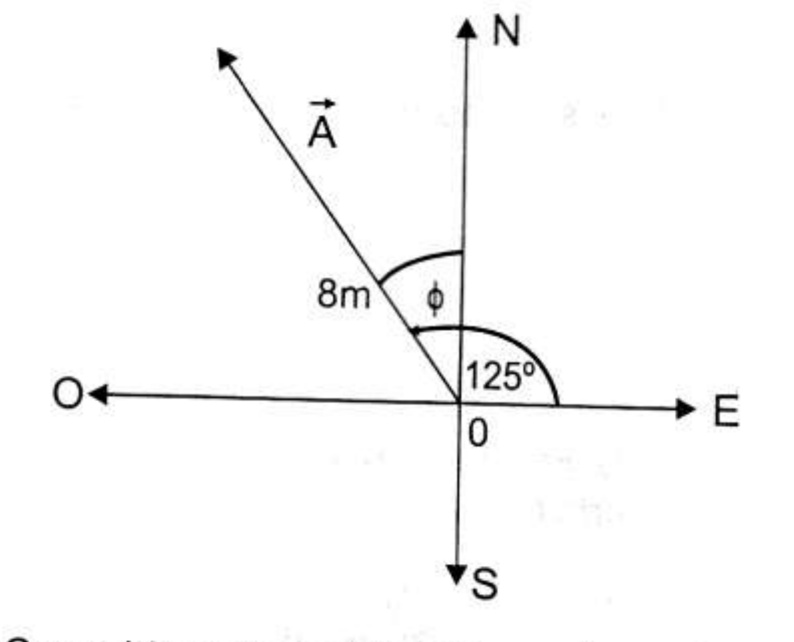
$Ay = 8\ m\ .\ \text{sen}\ 125°$

$Ay = 6,55\ m$

$\vec{A} = (Ax; Ay)$

$\vec{A} = (-4,59; 6,55)m$

b) Para la transformación de coordenadas polares (r, θ) en coordenadas geográficas (r; rumbo), primeramente se define el rumbo, calculando el ángulo agudo ϕ que existe entre el vector y el eje Norte o Sur:



$\phi = 125° - 90°$
$\phi = 35°$

rumbo: N35°0

$\vec{A}$ = (r, rumbo)

$\vec{A}$ = (8m; N35°0)

c) Conocidas las coordenadas rectangulares ***(x, y)***, expresamos el vector en función de los vectores base por **(1.3.12)**:

$$\vec{A} = Ax\,\vec{i} + Ay\,\vec{j}$$

$$\vec{A} = (-4{,}59\,\vec{i} + 6{,}55\,\vec{j}\,)m$$

d) Para expresar el vector en función de su módulo y unitario, primero encontramos el vector unitario y aplicamos **(1.3.1)**:

$$\vec{U}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

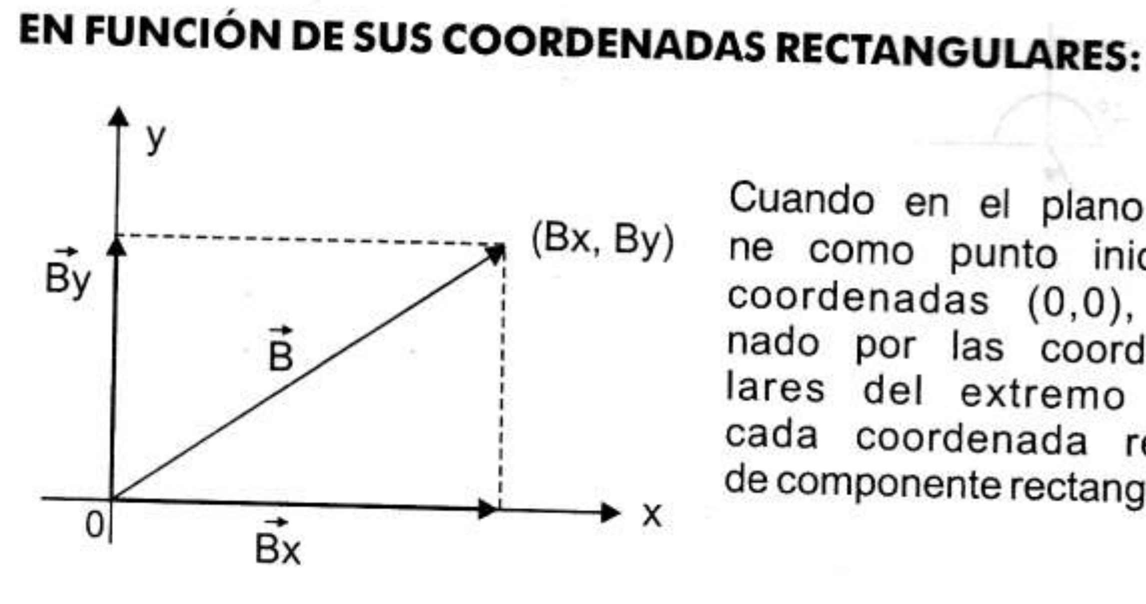
$$\vec{U}_A = \frac{(-4{,}59\,\vec{i} + 6{,}55\vec{j}\,)\ m}{8m}$$

$$\vec{U}_A = -0{,}574\,\vec{i} + 0{,}819\,\vec{j}$$

$$\vec{A} = A.\vec{U}_A$$

$$\vec{A} = 8m\,(-0{,}574\,\vec{i} + 0{,}819\vec{j}\,)$$

EN FUNCIÓN DE SUS COORDENADAS RECTANGULARES:



Cuando en el plano un vector $\vec{B}$ tiene como punto inicial el origen de coordenadas (0,0), queda determinado por las coordenadas rectangulares del extremo ***(Bx,By)***, donde cada coordenada recibe el nombre de componente rectangular.

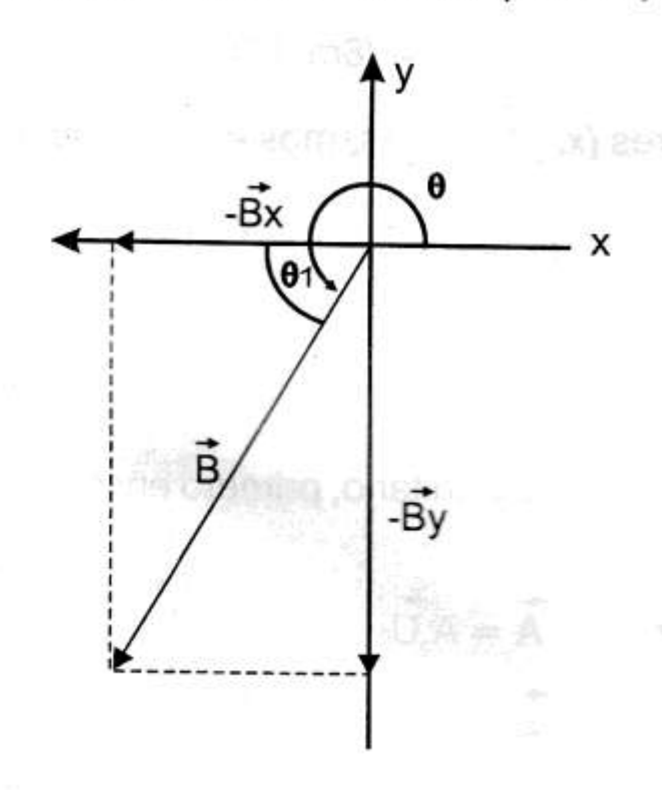
Ejemplo: $\vec{B} = (-4; -8)$m/s:

a) Cuando el vector está expresado en función de sus coordenadas rectangulares, lo expresamos en función de los vectores base:

$$\vec{B} = Bx\,\vec{i} + By\,\vec{j}$$

$$\vec{B} = (-4\,\vec{i} - 8\,\vec{j})\ m/s$$

b) Conocidas las componentes rectangulares Bx = -4 m/s y By = 8 m/s, las transformamos en coordenadas polares, utilizando **(1.3.6)** y **(1.3.7)**:



$$B^2 = Bx^2 + By^2$$

$$B^2 = (-4\ m/s)^2 + (-8\ m/s)^2$$

$$B = 8{,}94\ m/s$$

$$\tan\ \theta_1 = \frac{By}{Bx}$$

$$\tan\ \theta_1 = \frac{-8m/s}{-4m/s}$$

$$\theta_1 = 63{,}44°$$

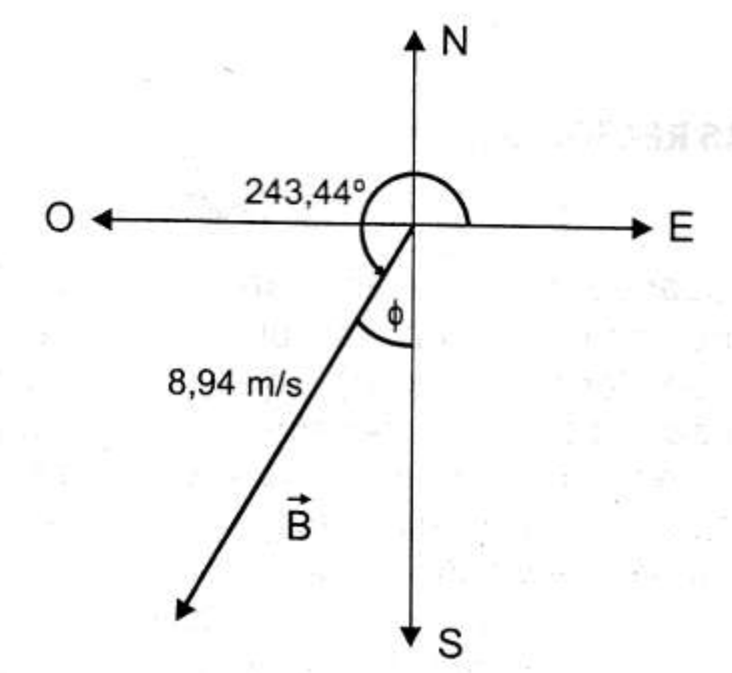
$$\theta = 180° + 63{,}44°$$

$$\theta = 243{,}44°$$

$$\vec{B} = (r; \theta)$$

$$\vec{B} = (8{,}94\ m/s;\ 243{,}44°)$$

c) Para transformar las coordenadas polares en coordenadas geográficas, primeramente calculamos el rumbo:



$$\phi = 270° - 243{,}44°$$

$$\phi = 26{,}56°$$

rumbo: S26,56°O

$$\vec{B} = (r,\ rumbo)$$

$$\vec{B} = (8{,}94\ m/s;\ S26{,}56°O)$$

d) La expresión de un vector en función de su módulo y unitario, implica el cálculo del vector unitario.

$$\vec{u}_B = \frac{\vec{B}}{B}$$

$$\vec{u}_B = \frac{(-4\vec{i} - 8\vec{j})\text{m/s}}{8{,}94\text{ m/s}}$$

$$\vec{u}_B = -0{,}447\vec{i} - 0{,}895\vec{j}$$

$$\vec{B} = B.\vec{u}_B$$

$$\vec{B} = 8{,}94\text{ m/s}(-0{,}447\vec{i} - 0{,}895\vec{j})$$

EN FUNCIÓN DE LOS VECTORES BASE:

Cuando un vector $\vec{C}$ en el plano está definido en la forma $Cx\vec{i} + Cy\vec{j}$, está expresado en función de un vector base, donde Cx es la componente escalar en el eje ***x***; Cy, la componente escalar en el eje ***y***.

Ejemplo: $\vec{C} = (7\vec{i} - 3\vec{j})$ km.

a) Conocidas las componentes escalares Cx y Cy, expresamos el vector en coordenadas rectangulares:

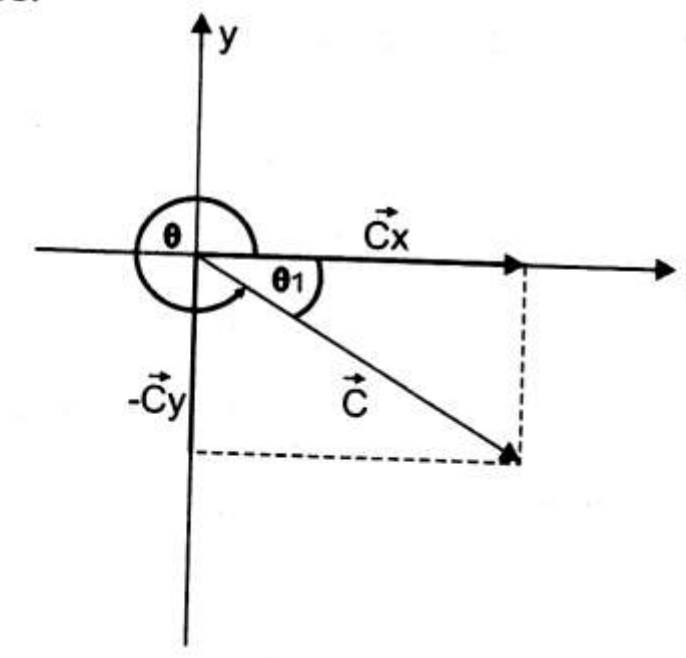
Cx = 7km

Cy = -3km

$\vec{C} = (Cx, Cy)$

$\vec{C} = (7, -3)$km

b) Conocidas las componentes rectangulares, expresamos el vector en coordenadas polares:



$C^2 = Cx^2 + Cy^2$

$C^2 = (7\text{ km})^2 + (-3\text{ km})^2$

C = 7,62km

$$\tan\theta_1 = \frac{Cy}{Cx}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{-3\text{ km}}{7\text{ km}}$$

$\theta_1 = -23{,}2°$

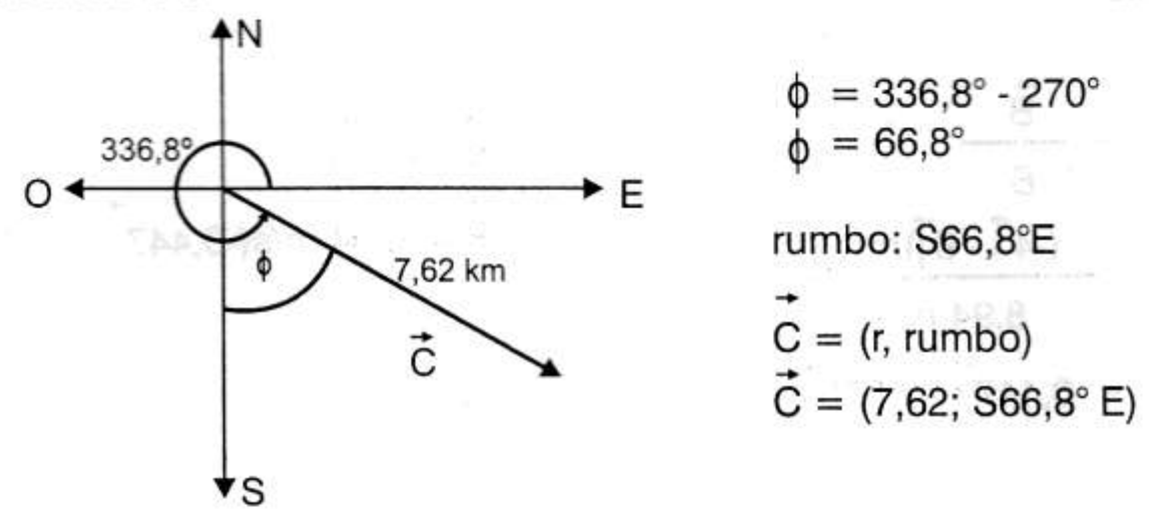
$\theta = 360° - 23{,}2°$

$\theta = 336{,}8°$

$\vec{C} = (r;\theta)$

$\vec{C} = (7{,}62\text{km}; 336{,}8°)$

c) Para transformar las coordenadas polares en coordenadas geográficas, calculamos el rumbo:



$\phi = 336{,}8° - 270°$
$\phi = 66{,}8°$

rumbo: S66,8°E

$\vec{C} = (r, \text{rumbo})$
$\vec{C} = (7{,}62;\ S66{,}8°\ E)$

d) Para expresar el vector en función de su módulo y unitario, calculamos el vector unitario:

$$\vec{u}_C = \frac{\vec{C}}{C}$$

$$\vec{u}_C = \frac{(7\vec{i} - 3\vec{j})\text{km}}{8{,}94\ \text{km}}$$

$$\vec{u}_C = 0{,}919\vec{i} - 0{,}394\,\vec{j}$$

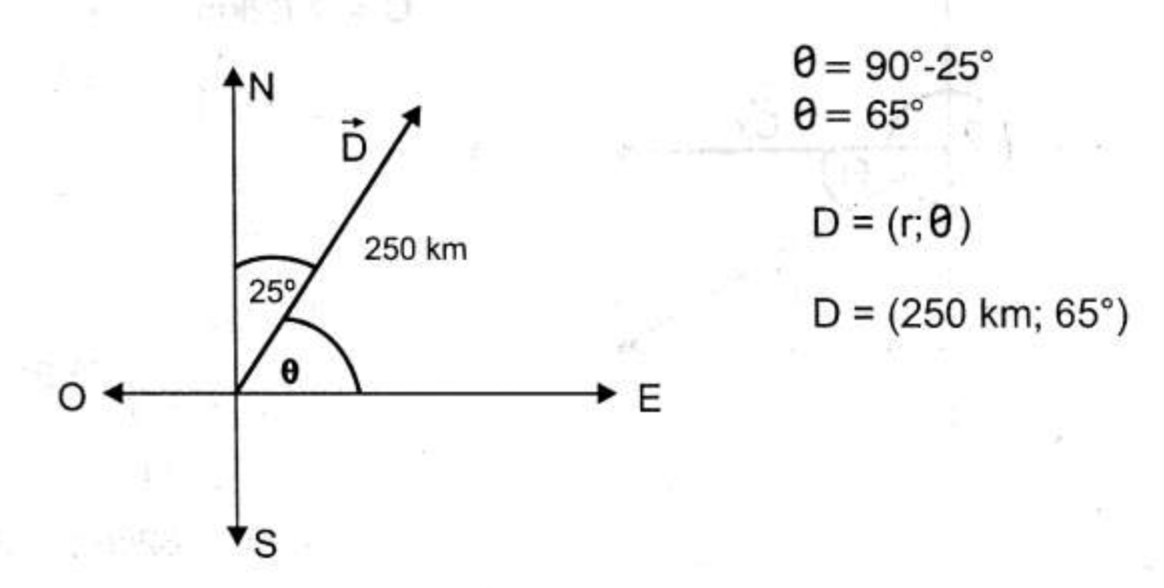
$$\vec{C} = C.\,\vec{u}_C$$

$$\vec{C} = 7{,}62\ \text{Km}(\,0{,}919\,\vec{i} - 0{,}394\,\vec{j}\,)$$

EN FUNCIÓN DE SUS COORDENADAS GEOGRÁFICAS:

Cuando un vector $\vec{D}$, en el plano, está definido por un par ordenado (r; rumbo), está expresado en coordenadas geográficas, donde ***r*** representa el módulo del vector; ***rumbo***, la dirección del mismo, Ejemplo: $\vec{D}$ = (250km; N25°E)

a) La transformación de coordenadas geográficas en coordenadas polares, implica el cálculo del ángulo θ:

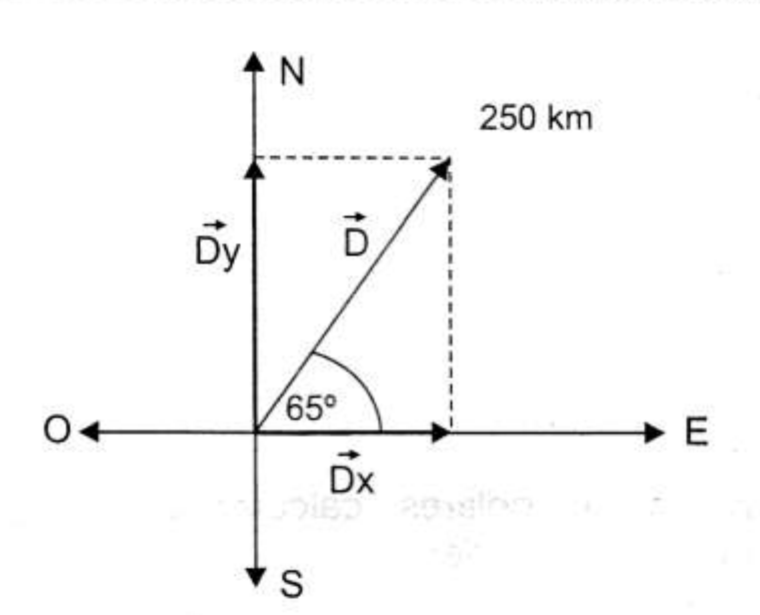


$\theta = 90° - 25°$
$\theta = 65°$

$D = (r; \theta)$

$D = (250\ \text{km};\ 65°)$

b) De coordenadas polares a coordenadas rectangulares:



$Dx = D.\cos\theta$

$Dx = 250\text{ km}.\cos 65°$

$Dx = 105{,}66\text{ km}$

$Dy = D\,.\,\text{sen}\,\theta$

$Dy = 250\text{km}.\,\text{sen}\,65°$

$Dy = 226{,}58\text{ km}$

$\vec{D} = (Dx, Dy)$

$\vec{D} = (105{,}66;\ 226{,}58)\text{ km}$

c) De coordenadas rectangulares en términos de los vectores base:

$$\vec{D} = Dx\,\vec{i} + Dy\,\vec{j}$$

$$\vec{D} = (105{,}66\,\vec{i} + 226{,}58\,\vec{j})\text{km}$$

d) El vector en función de su módulo y unitario:

$$\vec{u}_D = \frac{\vec{D}}{D}$$

$$\vec{u}_D = \frac{(105{,}66\,\vec{i} + 226{,}58\,\vec{j})\text{ km}}{250\text{ km}}$$

$$\vec{u}_D = 0{,}423\,\vec{i} + 0{,}906\,\vec{j}$$

$$\vec{D} = D.\,\vec{u}_D$$

$$\vec{D} = 250\text{ Km}(\,0{,}423\,\vec{i} - 0{,}906\,\vec{j}$$

EN FUNCIÓN DE SU MÓDULO Y UNITARIO:

Todo vector es igual al producto del módulo del mismo vector por su unitario

$$\vec{E} = E\,.\vec{u}_E$$

Ejemplo: $\vec{E} = 17\text{kgf}\,(-0{,}538\,\vec{i} + 0{,}843\,\vec{j})$

a) El vector $\vec{E}$ en términos de los vectores base, es igual al producto del módulo por su unitario:

$$\vec{E} = 17\text{kgf}(-0{,}538\,\vec{i} + 0{,}843\,\vec{j}\,)$$

$$\vec{E} = (-9{,}15\,\vec{i} + 14{,}33\,\vec{j}\,)\text{kgf}$$

b) La expresión de un vector en función de los vectores base, contiene las componentes rectangulares:

$$\vec{E} = (-9{,}15\,\vec{i} + 14{,}33\,\vec{j})\,\text{kgf}$$

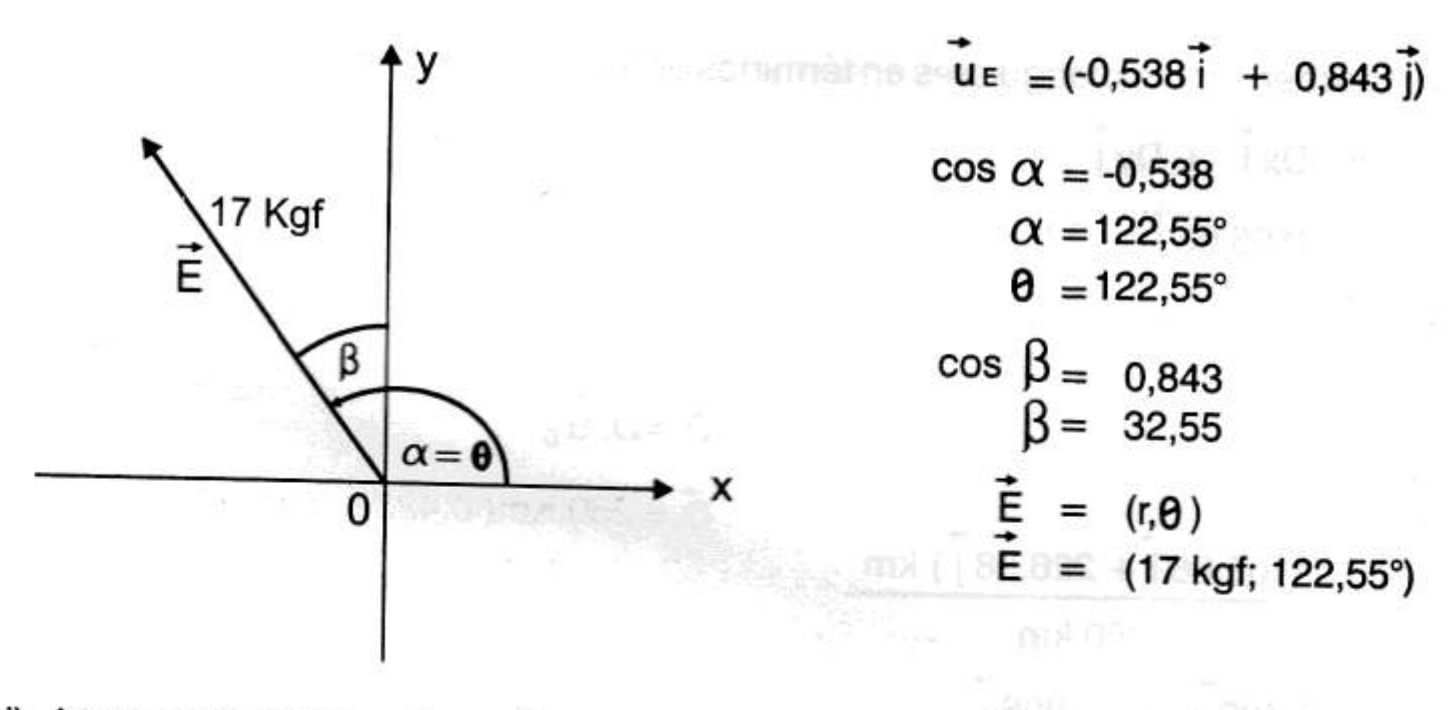
$$E_x = -9{,}15 \text{ kgf}$$

$$E_y = 14{,}33 \text{ kgf}$$

$$\vec{E} = (E_x; E_y)$$

$$\vec{E} = (-9.15\,\vec{i}\,;\, 14{,}33\,\vec{j})\text{ kgf}$$

c) Para expresar el vector en coordenadas polares, calculamos el ángulo θ determinando los ángulos directores del vector unitario:



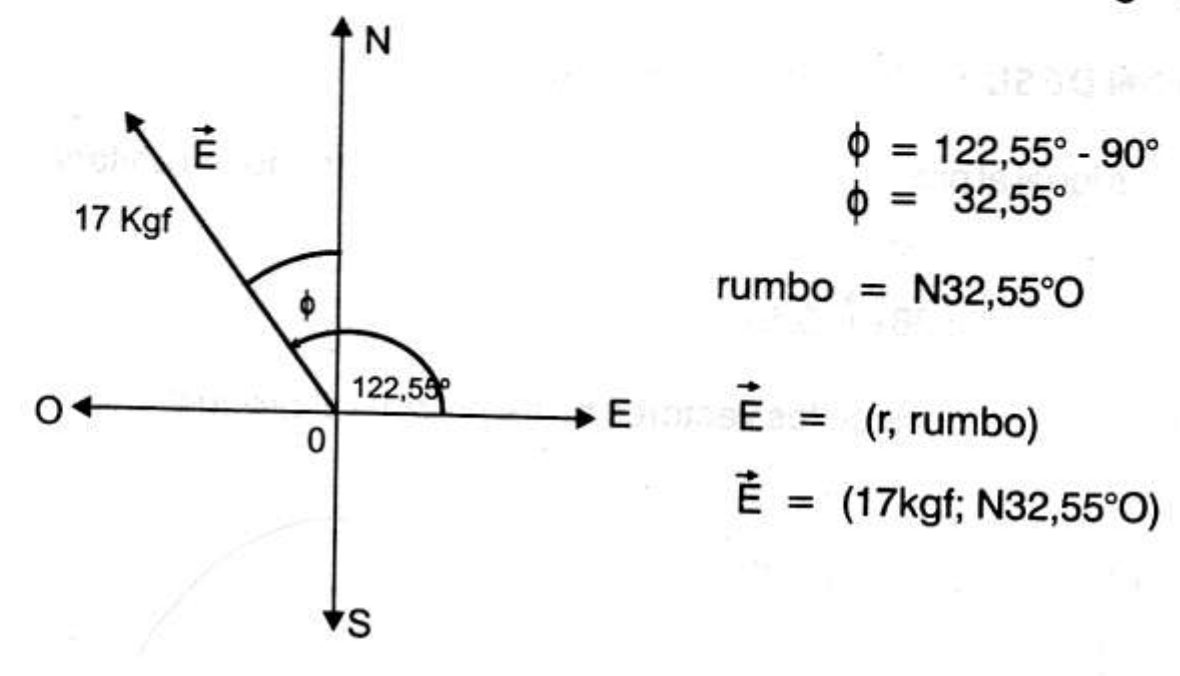
$$\vec{u}_E = (-0{,}538\,\vec{i} + 0{,}843\,\vec{j})$$

$$\cos\alpha = -0{,}538$$
$$\alpha = 122{,}55°$$
$$\theta = 122{,}55°$$

$$\cos\beta = 0{,}843$$
$$\beta = 32{,}55$$

$$\vec{E} = (r, \theta)$$
$$\vec{E} = (17 \text{ kgf}; 122{,}55°)$$

d) Las coordenadas polares de un vector determinan sus coordenadas geográficas.



$$\phi = 122{,}55° - 90°$$
$$\phi = 32{,}55°$$

rumbo = N32,55°O

$$\vec{E} = (r, \text{rumbo})$$

$$\vec{E} = (17\text{kgf}; \text{N}32{,}55°\text{O})$$

EJERCICIO N°3

1. Expresar en coordenadas rectangulares los siguientes vectores:

a) $\vec{A}$= $(15\vec{i} - 20\vec{j})$m
b) $\vec{B}$= (130N, 125°)
c) $\vec{C}$= (37cm, N37°E)
d) $\vec{D}$= 25Kgf $(-0,6\vec{i} - 0,8\vec{j})$

2. Expresar en coordenadas polares los siguientes vectores:

a) $\vec{A}$= $(-14\vec{i} + 8\vec{j})$ Kgf
b) $\vec{B}$= (87, 91) N
c) $\vec{C}$= 45 Kgf $(0,707\vec{i} - 0,707\vec{j})$
d) $\vec{D}$= (22N, S28°O)

3. Expresar en coordenadas geográficas los siguientes vectores:

a) $\vec{A}$= (52, -25) N
b) $\vec{B}$= (47N, 245°)
c) $\vec{C}$= $-32\vec{i}$m + $21\vec{j}$m
d) $\vec{D}$= 35cm $(0,866\vec{i} + 0,5\vec{j})$

4. Exprese en función de sus módulos y vectores unitarios los siguientes vectores:

a) $\vec{A}$= (44m, 340°)
b) $\vec{B}$= (25 km, S14°O)
c) $\vec{C}$= (-21, 45) N
d) $\vec{D}$= $(17\vec{i} + 9\vec{j})$ Kgf

5. Expresar el vector $\vec{R}$= (-13,-27)m en:

a) Coordenadas polares
b) Función de los vectores base
c) Coordenadas geográficas
d) Función de su modulo y unitario

6. Expresar el vector
$\vec{V}$= (200km, 318°) en:

a) Coordenadas geográficas
b) Coordenadas rectangulares
c) Función de los vectores base
d) Función de su modulo y unitario

7. Expresar el vector $\vec{K}$= (20N,N47°O) en:

a) Coordenadas polares
b) Coordenadas rectangulares
c) Función de su modulo y unitario
d) Función de los vectores base

8. Expresar el vector
$\vec{L}$= 147cm $(m\vec{i} - n\vec{j})$; Si m=3n, en:

a) Coordenadas geográficas
b) Coordenadas polares
c) Coordenadas rectangulares
d) Función de los vectores base

9. Expresar el vector
$\vec{H}$= $(-29\vec{i} + 35\vec{j})$ m/s en:

a) Coordenadas rectangulares
b) Función de su modulo y unitario
c) Coordenadas polares
d) Coordenadas geográficas

10. Expresar el vector
$\vec{E}$= $(9\vec{i} + 12\vec{j})$ m/s² en:

a) Coordenadas rectangulares
b) Coordenadas polares
c) Coordenadas geográficas
d) Función de su modulo y unitario

11. Exprese en función de sus vectores base los siguientes vectores:

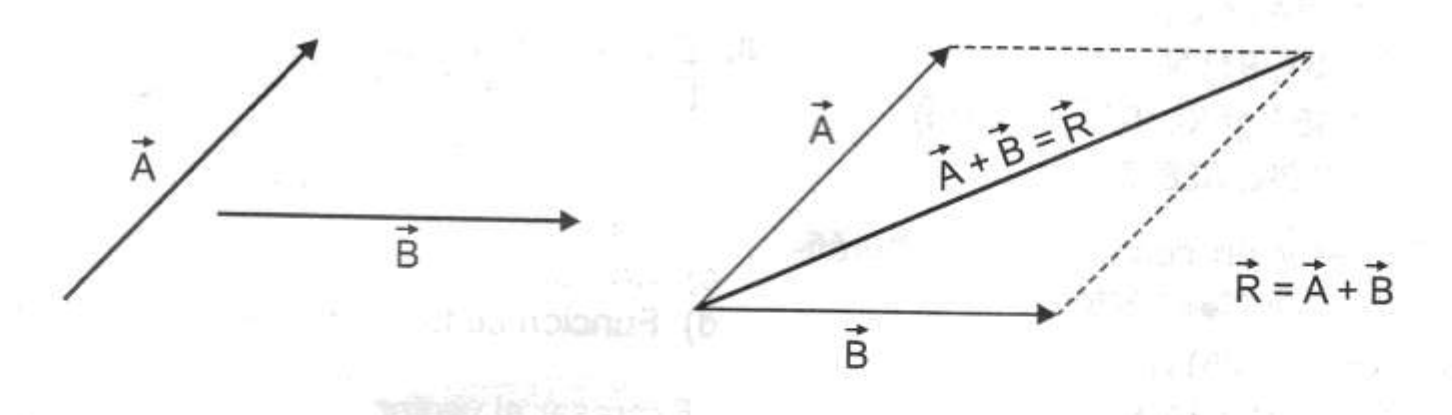
a) $\vec{A}$= (65km/h, 121°)
b) $\vec{B}$= (70N, NE)
c) $\vec{C}$= 120km $(0,873\vec{i} - 0,488\vec{j})$
d) $\vec{D}$= (-13, 40) N

1.5 OPERACIONES CON VECTORES

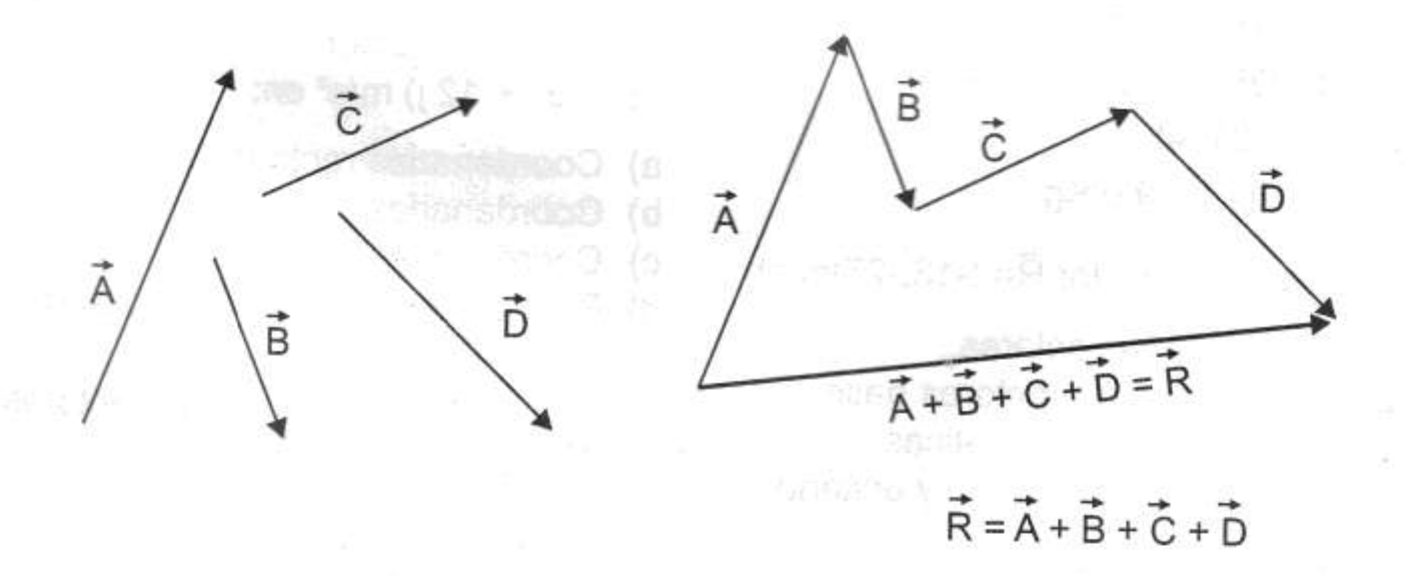
ADICIÓN DE VECTORES

Dos o más vectores cualesquiera, cuya suma sea un cierto vector $\vec{A}$, se dice que son componentes de dicho vector. Si las componentes son mutuamente perpendiculares, toman el nombre de componentes rectangulares.

MÉTODO DEL PARALELOGRAMO. A partir de un punto cualquiera del plano se trazan los dos vectores y se forma un paralelogramo. La diagonal del paralelogramo que va desde el origen al vertice opuesto, representa el vector resultante o suma. Ejemplo:



MÉTODO DEL POLÍGONO. A partir de un punto cualquiera del plano se trazan todos los vectores, uno a continuación de otro, manteniendo iguales sus módulos y direcciones. Uniendo el origen del primer vector con el extremo del último, se obtiene el vector resultante o suma. Ejemplo:



MÉTODO ALGEBRAICO. Para sumar algebraicamente dos o más vectores en el plano, éstos deben estar expresados en función de sus vectores base o componentes. Ejemplo:

En función de sus vectores base:

$$\vec{A} = Ax\,\vec{i} + Ay\,\vec{j}$$
$$\vec{B} = Bx\,\vec{i} + By\,\vec{j}$$
$$\vec{C} = Cx\,\vec{i} + Cy\,\vec{j}$$

....

....

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (Ax + Bx + Cx + \ldots)\vec{i} + (Ay + By + Cy + \ldots)\vec{j}$$

$$\vec{R} = Rx\,\vec{i} + Ry\,\vec{j}, \text{ donde: } Rx = Ax + Bx + Cx + \ldots$$
$$Ry = Ay + By + Cy + \ldots$$

(1.5.1)

En función de sus componentes:

$$\vec{A} = (Ax\,;\,Ay)$$
$$\vec{B} = (Bx\,;\,By)$$
$$\vec{C} = (Cx\,;\,Cy)$$

....

....

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (Ax + Bx + Cx + \ldots;\ Ay + By + Cy + \ldots)$$
$$\vec{R} = (Rx\,;\,Ry)$$

(1.5.2)

Propiedades de la suma vectorial:

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$	***Conmutativa***
$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$	***Asociativa***
$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$	***Distributiva vectorial***
$(m + n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$	***Distributiva escalar***
$\vec{A} + 0 = \vec{A}$	***Idéntico aditivo***
$\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$	***Inverso aditivo***

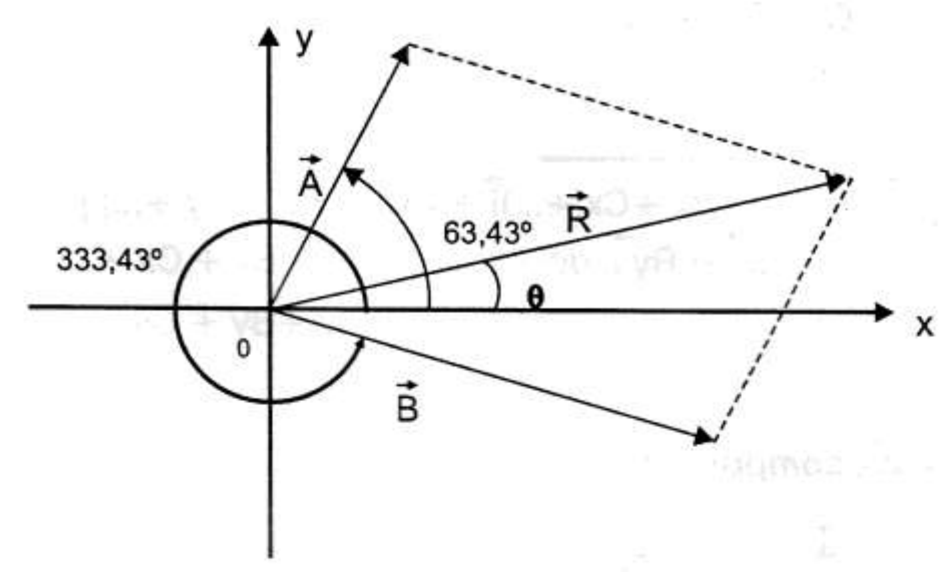
EJEMPLOS

1. Encontrar el vector resultante de la suma de los vectores $\vec{A} = (2, 4)$m y $\vec{B} = (6\vec{i} - 3\vec{j})$m

a) ***Método Del Paralelogramo***. Transformamos los vectores en coordenadas polares:

$\vec{A} = (2, 4)\text{m} = (4{,}47\text{m};\ \ 63{,}43°)$

$\vec{B} = (6\vec{i} - 3\vec{j})\text{m} = (6{,}71\text{ m};\ 333{,}43°)$



El módulo de $\vec{\mathbf{R}}$ es la medida de su longitud: R = 8,06 m.

La dirección de $\vec{\mathbf{R}}$ es la medida del ángulo θ: $\theta = 7{,}13°$.

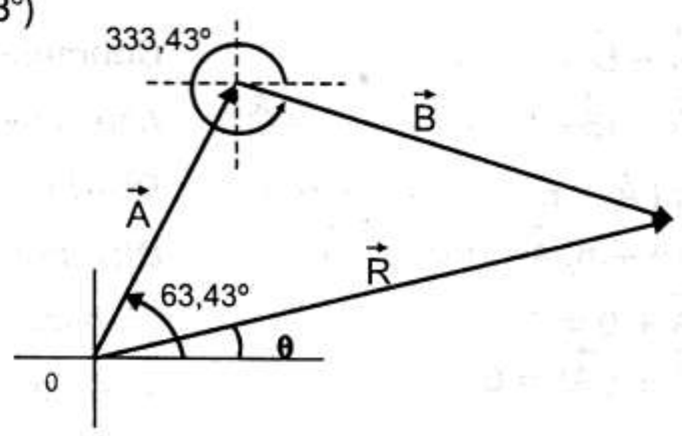
De donde el vector resultante es:

$\vec{R} = (8{,}06\text{m};\ 7{,}13°)$

b) ***Método Del Polígono***. Transformamos los vectores en coordenadas polares:

$\vec{A} = (2, 4)\text{m} = (4{,}47\text{m};\ \ 63{,}43°)$

$\vec{B} = (6\vec{i} - 3\vec{j})\text{m} = (6{,}71\text{ m};\ 333{,}43°)$



El módulo de $\vec{R}$ es la medida de su longitud: R = 8,06 m..

La dirección de $\vec{R}$ es la medida del ángulo θ: θ = 7,13°

De donde el vector resultante es:

$\vec{R}$ = (8,06m; 7,13°)

c) ***Método Algebraico***. En función de sus vectores base:

$$\begin{array}{l} \vec{A} = (2\vec{i} + 4\vec{j})\ m. \\ \vec{B} = (6\vec{i} - 3\vec{j}\ )\ m. \\ \hline \vec{R} = (8\vec{i} + \vec{j}\ )\ m. \end{array}$$

$$\vec{R} = (8{,}06m;\ 7{,}13°)$$

En función de sus componentes rectangulares:

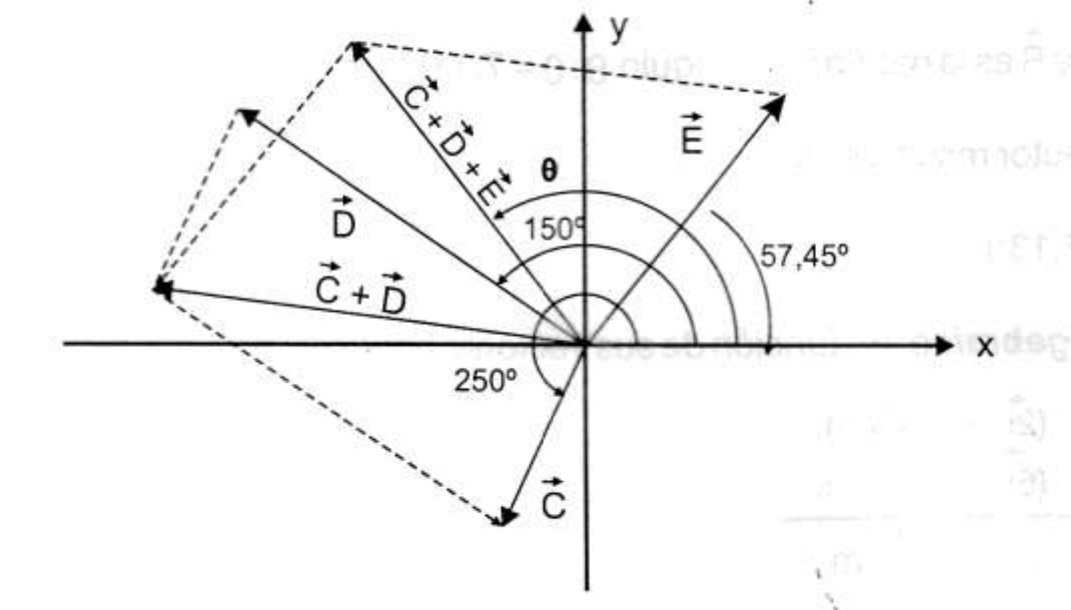
$$\begin{array}{l} \vec{A} = (2,\ 4)m. \\ \vec{B} = (6,\ -3)m. \\ \hline \vec{R} = (8,\ 1) \\ \vec{R} = (8\vec{i} + \vec{j}\ )\ m \\ \vec{R} = (8{,}06m;\ 7{,}13°) \end{array}$$

2. Encontrar el vector resultante al sumar los vectores $\vec{C}$ = (20 m/s; 250°),

$\vec{D}$ = (50m/s; N60°O) y $\vec{E}$ = 30 m/s (0 ,538$\vec{i}$ + 0,843$\vec{j}$).

a) ***Método del paralelogramo***. Transformamos los vectores en coordenadas polares:

$$\vec{C} = (20\ m/s;\ 250°)$$
$$\vec{D} = (50m/s; N60°O) = (52\ m/s;\ 150°)$$
$$\vec{E} = 30m/s(0{,}538\,\vec{i} + 0{,}843\,\vec{j}) = (30m/s;\ 57{,}45°)$$



El módulo de $\vec{R}$ es la medida de su longitud: R = 46,35 m/s

La dirección de $\vec{R}$ es la medida del ángulo θ : θ = 137,19°

De donde el vector resultante es:

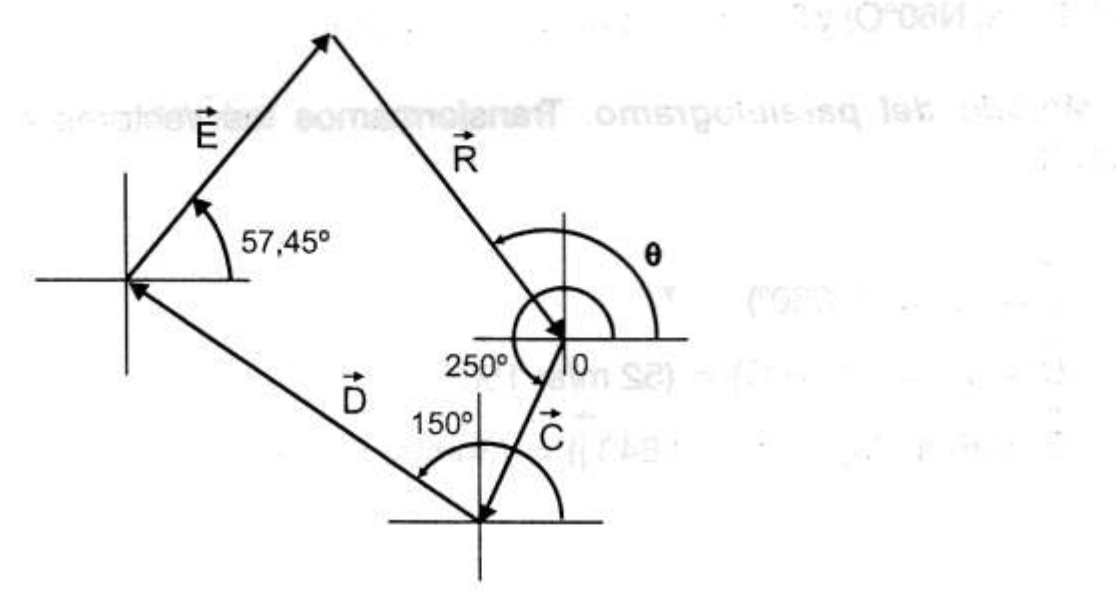
$\vec{R}$ = (46,35 m/s; 137,19°)

b) ***Método del polígono***. Transformamos los vectores en coordenadas polares:

$\vec{C}$ = (20 m/s; 250°)

$\vec{D}$ = (50 m/s; N60°O) = (52 m/s; 150°)

$\vec{E}$ = 30m/s(0,538i + 0,843j) = (30m/s; 57,45°)



El módulo de $\vec{R}$ es la medida de su longitud: R = 46,35 m/s

La dirección de $\vec{R}$ es la medida de $\theta: \theta = 137{,}19°$

De donde el vector resultante es:

$\vec{R}$ = (46,35 m./s; 137,19°)

c) ***Método algebraico***. En función de sus vectores base:

$\vec{C}$ = (20m/s; 250°) = (-6,84$\vec{i}$ - 18,79$\vec{j}$)m/s
$\vec{D}$ = (50m/s; N60°O) = (-43,30 $\vec{i}$ + 25,00$\vec{j}$) m/s
$\vec{E}$ = 30m/s(0,538 $\vec{i}$+0,843 $\vec{j}$) = (16,14 $\vec{i}$+ 25,29$\vec{j}$) m/s

$\vec{R}$ = (-34,00 $\vec{i}$ + 31,5$\vec{j}$)m/s

$\vec{R}$ = (46,35 m./s ; 137,19°)

En función de sus componentes rectangulares:

$\vec{C}$=(20m/s; 250°) = (-6,84; -18,79) m/s
$\vec{D}$=(50m/s; N60°O) = (-43.30; 25,00) m/s
$\vec{E}$=30m/s(0,538$\vec{i}$ + 0,843$\vec{j}$) = (16,14; 25,29)m./s

$\vec{R}$ = (-34,00; 31,5) m/s

$\vec{R}$ = (-34 $\vec{i}$ + 31,5$\vec{j}$) m/s

$\vec{R}$ = (46,35 m/s; 137,19°)

3. Encontrar el vector resultante al sumar los vectores A = (150kgf; 23°),

B = (-350 $\vec{i}$+470 $\vec{j}$)kgf, C = (-100; -550)kgf y D =(230kgf; S75°E).

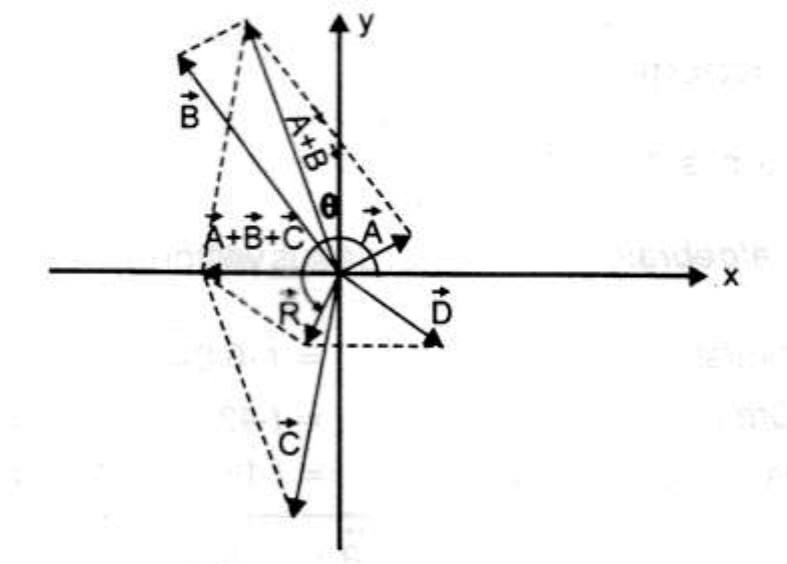
a) ***Método del paralelogramo***: expresamos los vectores en coordenadas polares.

$\vec{A}$=(150kgf; 23°)

$\vec{B}$=(-350i +470)kgf = (586kgf; 126,67°)

$\vec{C}$=(-100; -550) kgf = (559,02 kgf; 259,7°)

$\vec{D}$=(230 kgf; S75°E) = (230 Kgf; 345°)



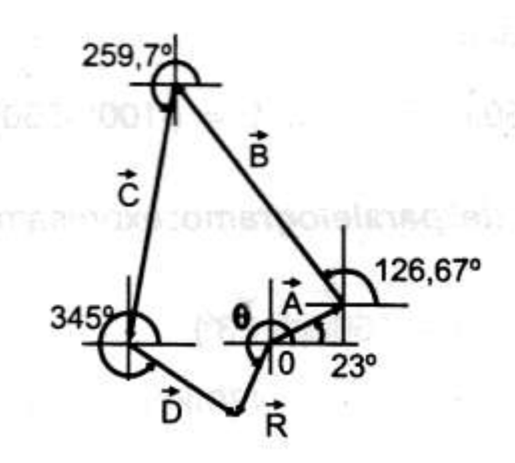
El módulo de $\vec{R}$ es 120,78 kgf.

La dirección de $\vec{R}$ es: $\theta = 222{,}06°$

Y el vector resultante es: $\vec{R} = (120{,}78 \text{ kgf}; 222{,}06°)$.

b) ***Método del polígono***: expresamos los vectores en coordenadas polares:

$\vec{A}$ = (150 kgf; 23°)
$\vec{B} = (-350\vec{i} + 470\vec{j})$kgf = (586kgf; 126,67°)
$\vec{C}$ = (-100; -550) kgf = (559,02 kgf; 259,7°)
$\vec{D}$ = (230 kgf; S75°E) = (230 Kgf; 345°)



El módulo de $\vec{R}$ es 120,78 kgf.

La dirección de $\vec{R}$ es: $\theta = 222{,}06°$

Y el vector resultante es: $\vec{R} = (120{,}78 \text{ kgf}; 222{,}06°)$.

c) ***Método algebraico:***

En función de sus vectores base:

$$\vec{A} = (150\ \text{kgf};\ 23°) = (138{,}08\,\vec{i} + 58{,}61\,\vec{j})\ \text{kgf}$$
$$\vec{B} = (-350i+470j)\text{kgf} = (-350\,\vec{i} + 470\,\vec{j})\text{kgf}$$
$$\vec{C} = (-100;\ -550)\ \text{kgf} = (-100\,\vec{i} - 550\,\vec{j})\ \text{kgf}$$
$$\vec{D} = (230\ \text{kgf};\ \text{S}75°\text{E}) = (222{,}16\,\vec{i} - 59{,}33\,\vec{j})\ \text{kgf}$$

$$\vec{R} = (-89{,}76\,\vec{i} - 80{,}92\,\vec{j})\ \text{kgf}$$
$$\vec{R} = (120{,}85\ \text{kgf};\ 222{,}04°)$$

En función de sus componentes rectangulares:

$$\vec{A} = (150\ \text{kgf};\ 23°) = (138{,}08;\ 58{,}61)\ \text{kgf}$$
$$\vec{B} = (-350\ i+470\ j)\text{kgf} = (-350;\ 470)\text{kgf}$$
$$\vec{C} = (-100;\ -550)\ \text{kgf} = (-100;\ -550)\ \text{kgf}$$
$$\vec{D} = (230\ \text{kgf};\ \text{S}75°\text{E}) = (222{,}16;\ -59{,}33)\ \text{kgf}$$

$$\vec{R} = (-89{,}76;\ -80{,}92)$$
$$\vec{R} = (-89{,}76\,\vec{i} - 80{,}92\,\vec{j})\ \text{kgf}$$
$$\vec{R} = (120{,}85\ \text{kgf};\ 222{,}04°)$$

DIFERENCIA DE VECTORES

La diferencia de vectores es un caso particular de la suma de vectores. Se define como la suma de un vector con el negativo de otro:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \qquad \textbf{(1.5.3)}$$

En consecuencia, todos los métodos de la suma vectorial son aplicables a la diferencia vectorial.

La diferencia de vectores no cumple la propiedad conmutativa:

$$\vec{A} - \vec{B} \neq \vec{B} - \vec{A}$$

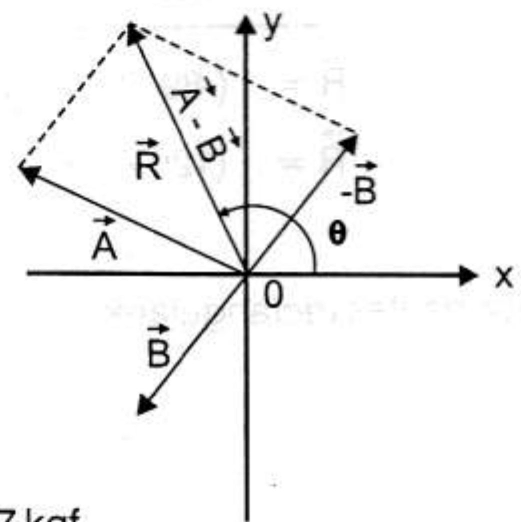
EJEMPLOS

1. Si $\vec{A} = (7kgf; 155°)$ y $\vec{B} = (-3\vec{i} - 4\vec{j})kgf$, hallar $\vec{A} - \vec{B}$:

a) *Método del paralelogramo*: Escribimos los vectores en coordenadas polares.

$$\vec{A} = (7\ kgf; 155°)$$

$$\vec{B} = (-3\vec{i}-4\vec{j})kgf = (5kgf; 233{,}13°)$$

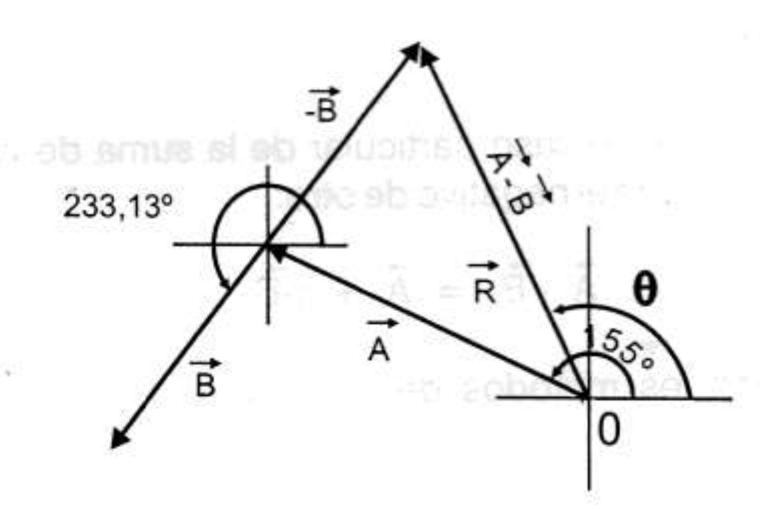


El módulo de $\vec{R}$ es 7,7 kgf.
La dirección de $\vec{R}$ es: $\theta = 115°$
Y el vector resultante es: $\vec{R} = (7{,}7\ kgf; 115°)$.

b) *Método del polígono*: escribimos los vectores en coordenadas polares:

$$\vec{A} = (7\ kgf; 155°)$$

$$\vec{B} = (-3\vec{i} - 4\vec{j})kgf = (5kgf; 233{,}13°)$$



El módulo de $\vec{R}$ es 7,7 kgf.
La dirección de $\vec{R}$ es: $\theta = 115°$
Y el vector resultante es: $\vec{R} = (7{,}7\ kgf; 115°)$.

c) Método algebraico:

En función de los vectores base:

$\vec{A} = (7\ kgf; 155°)$

$\vec{B} = (-3\ i\ -4\ j)\ kgf$

$\vec{A} = (-6{,}34\ \vec{i} + 2{,}96\ \vec{j})\ kgf$

$\vec{B} = (3\ \vec{i} + 4\ \vec{j})$

$\vec{R} = (-3{,}34\ \vec{i} + 6{,}96\ \vec{j})\ kgf$

$\vec{R} = (7{,}72 kgf; 115{,}64°)$

En función de sus componentes rectangulares:

$\vec{A} = (7\ kgf; 155°)$

$\vec{A} = (-6{,}34\ i + 2{,}96\ j)\ kgf$

$\vec{B} = (-3\ \vec{i}\ -4\ \vec{j})\ kgf$

$\vec{B} = (-3{,}00; -4{,}00)\ kgf$

$\vec{A} = (-6{,}34; 2{,}96)\ kgf$

$-\vec{B} = (3{,}00; 4{,}00)\ kgf$

$\vec{R} = (-3{,}34; 6{,}96)\ kgf$

$\vec{R} = (-3{,}34\ \vec{i} + 6{,}96\ \vec{j})\ kgf$

$\vec{R} = (7{,}72\ kgf; 115{,}64°)$

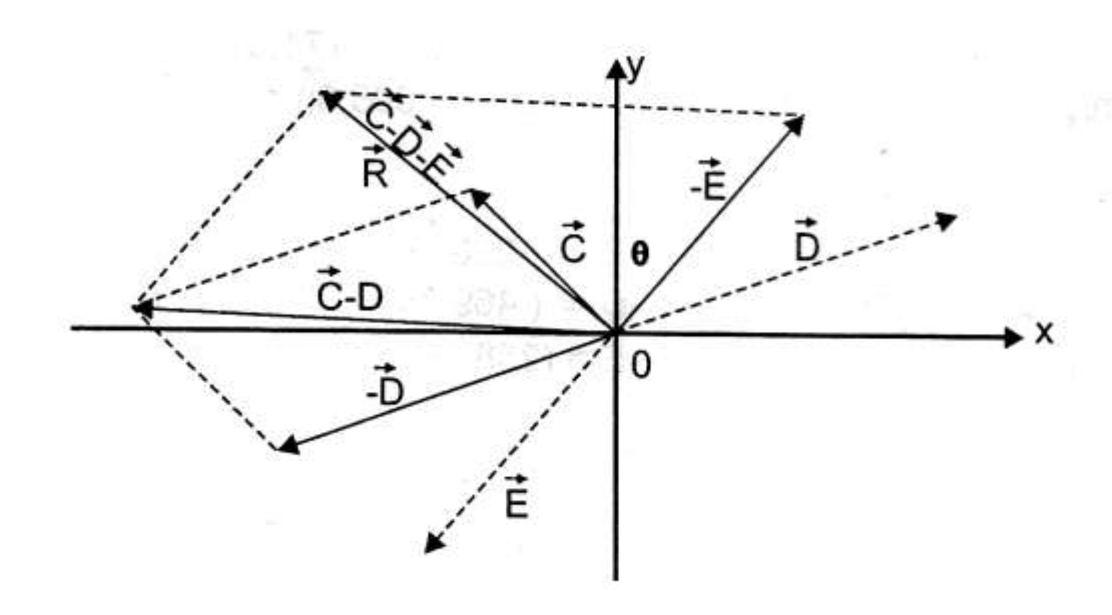
2. Si $\vec{C} = (-200; 200)$ m/s, $\vec{D} = (500$ m./s; N70º E) y $\vec{E} = 400$m/s $(-0{,}654\ \vec{i} - 0{,}764\ \vec{j})$, hallar $\vec{C} - \vec{D} - \vec{E}$:

a) Método del paralelogramo: expresamos los vectores en coordenadas polares.

$\vec{C} = (-200; 200)\ m/s \quad = (282{,}84\ m/s; 135°)$

$\vec{D} = (500\ m/s; N10°\ E) \quad = (500\ m/s; 20°)$

$\vec{E} = 400m/s\ (-0{,}645\ \vec{i} - 0{,}764\ \vec{j}) \quad = (400\ m/s; 229{,}84°)$



El módulo de $\vec{R}$ es 530 m./s.

La dirección de $\vec{R}$ es: $\theta = 140°$

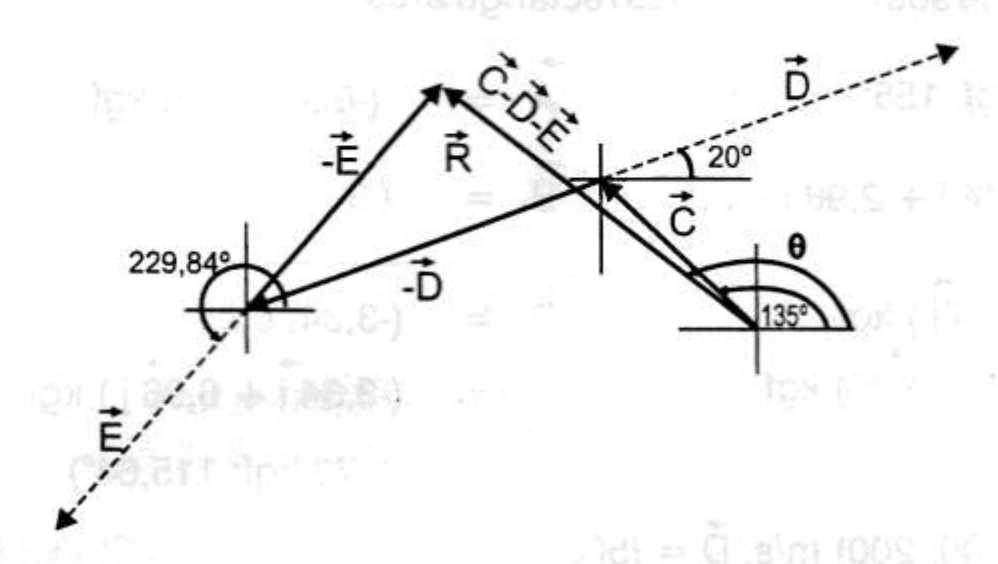
El vector resultante es: $\vec{R} = (530\ m/s;\ 140°)$.

b) *Método del poligono*: expresamos los vectores en coordenadas polares:

$\vec{C} = (-200;\ 200)\ m./s \qquad = (282{,}84\ m/s;\ 135°)$

$\vec{D} = (500\ m/s\ \ N70°E) \qquad = (500\ m/s;\ 20°)$

$\vec{E} = 400\ m/s\ (-0{,}645\ \vec{i} - 0{,}764\ \vec{j}) \qquad = (400\ m/s;\ 229{,}84°)$



El módulo de $\vec{R}$ es 530 m/s

La dirección de $\vec{R}$ es: $\theta = 140°$

El vector resultante es: $\vec{R} = (530\ m/s;\ 140°)$.

c) *Método algebraico:*

En función de sus vectores base:

$\vec{C} = (-200;\ 200)\ m/s \qquad = (-200\ \vec{i} + 200\ \vec{j})\ m/s$

$\vec{D} = (500\ m/s;\ N70°E) \qquad = (4\ 69{,}85\ \vec{i} + 171{,}01\ \vec{j})\ m/s$

$\vec{E} = 400 m/s\ (--0{,}645\ \vec{i} - 0{,}764\ \vec{j}) \qquad = (-258\ \vec{i} - 305{,}6 \vec{j})\ m/s$

$\vec{C} = (-200\ \vec{i} + 200\ \vec{j})\ m./s$

$-\vec{D} = (-469{,}85\ \vec{i} - 171{,}01\ \vec{j})\ m/s$

$-\vec{E} = (258\ \vec{i} + 305{,}6\ \vec{j})\ m/s$

$\vec{R} = (-411{,}85\ \vec{i} + 334{,}59\ \vec{j})\ m/s$

$\vec{R} = (530{,}63\ m/s;\ 140{,}91°)$

En función de sus componentes:

$\vec{C}$ = (-200; 200) m/s = (-200; 200) m/s

$\vec{D}$ = (500 m/s ; N70°E) = (469,85; 171,01) m/s

$\vec{E}$ = 400m/s (-0,645 $\vec{i}$ -0,764 $\vec{j}$) = (-258; -305,6) m/s

$\vec{C}$ = (-200; 200) m/s

$-\vec{D}$ = (-469,85; -171,01) m/s

$-\vec{E}$ = (258; 305,6) m/s

$\vec{R}$ = (-411,85; 334,59) m/s

$\vec{R}$ = (-411,85$\vec{i}$ + 334,59 $\vec{j}$) m/s

$\vec{R}$ = (530,63 m./s; 140,91°)

MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

El producto de un escalar k por un vector $\vec{A}$, es otro vector cuyo módulo es k veces la longitud del vector A y cuya dirección y sentido coincide con la de $\vec{A}$ si k > 0; es opuesto a la de $\vec{A}$, si k < 0. Si k = 0, la longitud es igual a cero y el vector se convierte en nulo.

$$k.\vec{A} = \overbrace{\vec{A} + \vec{A} + \vec{A} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{A}}^{k\ \text{veces}}$$

El producto de un escalar k por un vector $\vec{A}$, se obtiene multiplicando k por las componentes de A

$$k\vec{A} = k(Ax\,\vec{i} + Ay\,\vec{j})$$

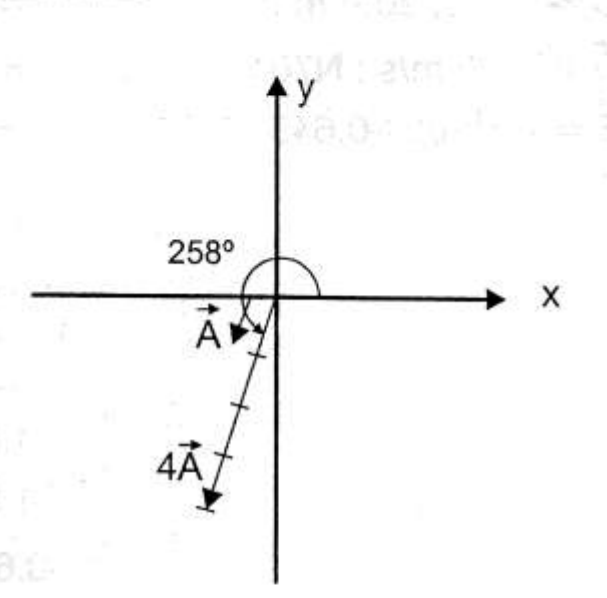
$$k\vec{A} = kAx\,\vec{i} + kAy\,\vec{j} \qquad \textbf{(1.5.4)}$$

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector:

a. $\vec{A}$	=	$\vec{A}$. a	***Conmutativa***
a (b . $\vec{A}$)	=	(a. b) . $\vec{A}$	***Asociativa***
(a + b). $\vec{A}$	=	a. $\vec{A}$ + b. $\vec{A}$	***Distributiva escalar***
a($\vec{A}$ + $\vec{B}$)	=	a. $\vec{A}$ + a. $\vec{B}$	***Distributiva vectorial***

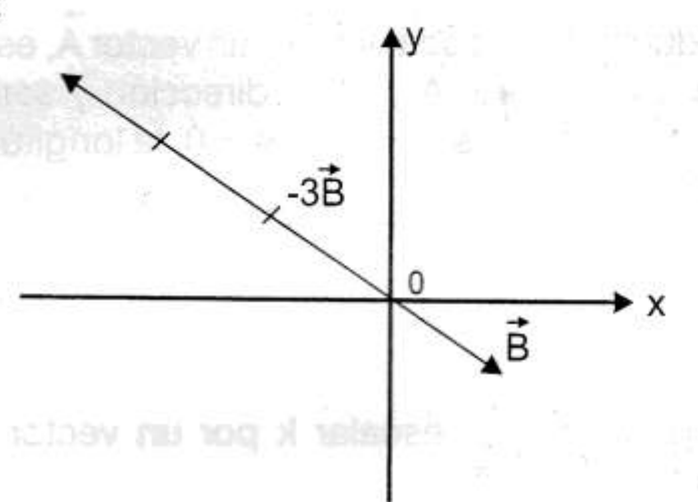
EJEMPLOS

1. Si $k = 4$ y $\vec{A} = (15kgf; 258°)$, hallar $k.\vec{A}$:



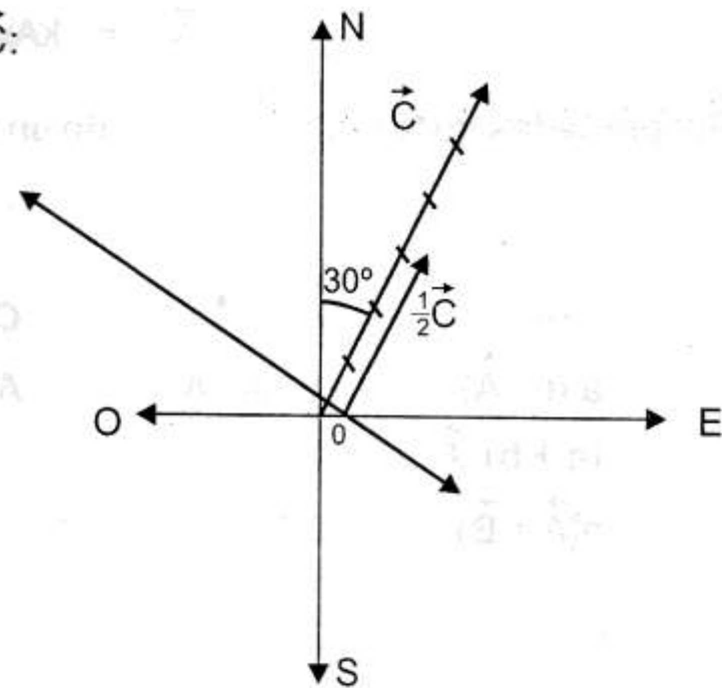
$$k\vec{A} = k\,(Ax\,\vec{i} + Ay\,\vec{j})$$
$$4\vec{A} = 4(15kgf;\ 258°)$$
$$4\vec{A} = 4(-3{,}12\,\vec{i} - 14{,}67\,\vec{j})kgf$$
$$4\vec{A} = (-12{,}48\,\vec{i} - 58{,}69\,\vec{j})\ kgf$$
$$4\vec{A} = (60kgf;\ 258°)$$

2. Si $k = -3$ y $\vec{B} = (3, -2)$ m/s, hallar $k.\vec{B}$:



$$k\vec{B} = k\,(Bx\,\vec{i} + By\,\vec{j})$$
$$-3\vec{B} = -3(3, -2)\ m/s$$
$$-3\vec{B} = -3(3\,\vec{i} - 2\,\vec{j})\ m/s$$
$$-3\vec{B} = (-9\vec{i} + 6\vec{j})m/s$$
$$-3\vec{B} = (10{,}82\ m./s;\ 146{,}31°)$$

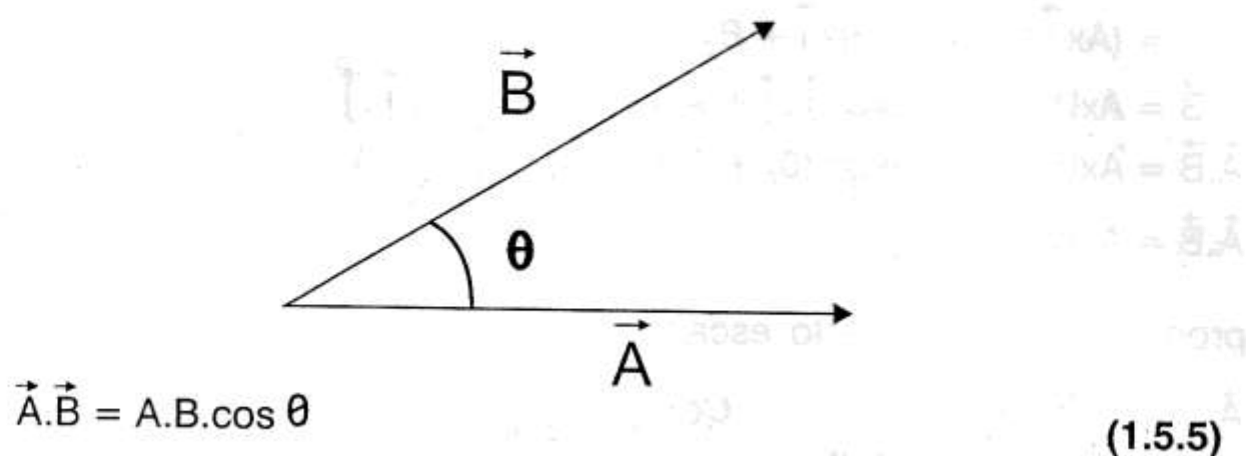
3. Si $k = ½$ y $C = (60\ km;\ N30°E)$, hallar $k\vec{C}$:



$$k\vec{C} = k\,(Cx\,\vec{i} + Cy\,\vec{j})$$
$$½\,\vec{C} = ½\ (60km;\ N30°E)$$
$$½\,\vec{C} = ½\ (30\,\vec{i} + 51{,}96\vec{j})\ km$$
$$½\,\vec{C} = (15\,\vec{i} + 25{,}98\vec{j})\ km$$
$$½\,\vec{C} = (30\ km;\ 60°)$$

PRODUCTO ESCALAR:

El producto escalar o producto punto de dos vectores, es un escalar igual al producto de los módulos de los vectores dados, por el coseno del menor ángulo que forman entre sí:



$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos\theta \qquad \textbf{(1.5.5)}$$

El producto escalar se representa intercalando un punto (.) entre los símbolos de los vectores.

Puesto que cos0° = 1, cos 90° = 0 y cos 180° = -1, se deduce de **(1.5.5)** que:

a) El producto escalar de dos vectores paralelos es igual al producto de sus módulos. Es positivo si van en el mismo sentido ($\vec{u}_A=\vec{u}_B$); y negativo, en caso contrario ($\vec{u}_A= -\vec{u}_B$):

$\vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos 0°$ $\qquad$ $\vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos 180°$

$\vec{A}.\vec{B} = A.B.(1)$ $\qquad$ $\vec{A}.\vec{B}. = A.B.(-1)$

$\vec{A}.\vec{B} = A.B$ $\qquad$ $\vec{A}.\vec{B}. = -A.B$

b) El producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero:

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos 90°$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.(0)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 0$$

Entonces, el producto escalar de los vectores unitarios rectangulares es:

$$\vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{j}\,.\,\vec{j} = 1$$

$$\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{i} = 0$$

c) El producto escalar de un vector por sí mismo, $\vec{A}\,.\,\vec{A}$, es igual al cuadrado de su módulo:

$$\vec{A}.\vec{A} = A.A.\cos 0°$$

$$\vec{A}.\vec{A} = A.A.(1)$$
$$\vec{A}.\vec{A} = A^2$$

d) El producto escalar de dos vectores en función de sus vectores base es:

$$\vec{A}.\vec{B} = (Ax\,\vec{i} + Ay\,\vec{j}) \,.\, (Bx\,\vec{i} + By\,\vec{j}\,)$$
$$\vec{A}.\vec{B} = AxBx\,\vec{i}\,.\,\vec{i} + AxBy\,\vec{i}\,.\,\vec{j} + AyBx\,\vec{j}\,.\,\vec{i} + AyBy\,\vec{j}\,.\,\vec{j}$$
$$\vec{A}.\vec{B} = AxBx\,(1) + AxBy\,(0) + AyBx\,(0) + AyBy\,(1)$$
$$\vec{A}.\vec{B} = AxBx + AyBy \qquad \textbf{(1.5.6)}$$

Las propiedades del producto escalar son:

$\vec{A}\,.\,\vec{B}\,. = \vec{B}\,.\,\vec{A}\,.$ ***Conmutativa***

$\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$ ***Distributiva con relación a la suma de vectores.***

$m(\vec{A}.\vec{B}) = (m\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(m\vec{B})$

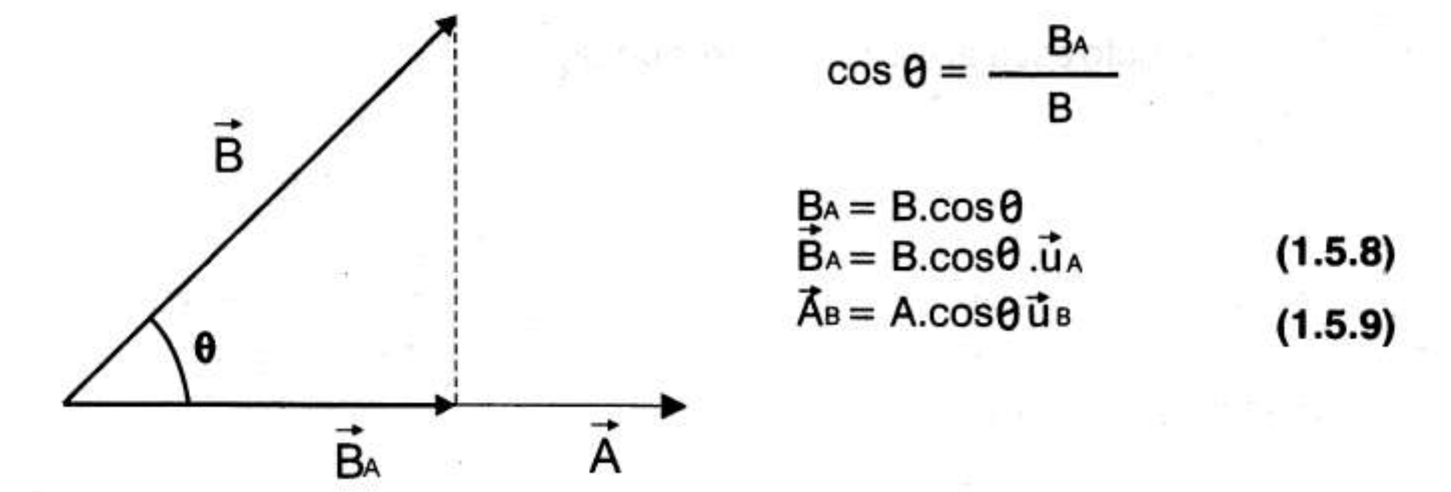
Entre las aplicaciones del producto escalar tenemos:

a) Cálculo del ángulo formado por dos vectores:

Igualamos las ecuaciones **(1.5.5)** y **(1.5.6)**:

$$A.B \cos\theta = AxBx + AyBy$$
$$\cos\theta = \frac{AxBx + AyBy}{A.B}$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A.B} \qquad \textbf{(1.5.7)}$$

b) Cálculo de la proyección de un vector sobre otro:



$$\cos\theta = \frac{B_A}{B}$$

$$B_A = B.\cos\theta$$
$$\vec{B}_A = B.\cos\theta\,.\vec{u}_A \qquad \textbf{(1.5.8)}$$
$$\vec{A}_B = A.\cos\theta\,\vec{u}_B \qquad \textbf{(1.5.9)}$$

EJEMPLOS

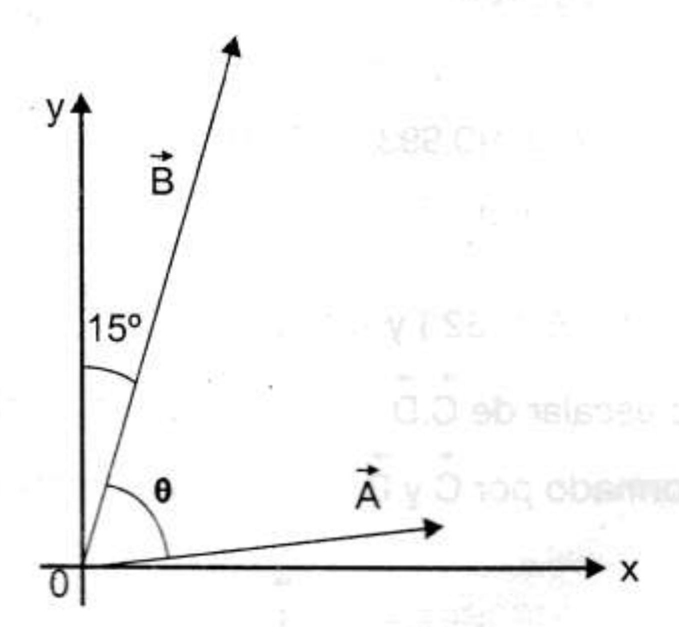
1. Dados el vector $\vec{A} = (8\vec{i} + \vec{j})$km y el vector $\vec{B} = (12$ km; N15°E), calcular:

a) El producto escalar de $\vec{A}.\vec{B}$.

b) El ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$

c) La proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$.

d) La proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.



a) $\vec{A} = (8\vec{i} + \vec{j})$ km

$\vec{B} = (12\text{km; N}15°\text{E}) = (3{,}11\vec{i} + 11{,}59\vec{j})$ km

$A.\vec{B} = AxBx + AyBy$

$\vec{A}.\vec{B} = [(8)(3{,}11) + (1)(11{,}59)]$ km^2

$\vec{A}.\vec{B}. = (24{,}88 + 11{,}59)$ km^2

$\vec{A}.\vec{B} = 36{,}47$ km^2

b) $\vec{A} = (8\vec{i} + \vec{j})\text{km} = (8{,}06\text{km; } 7{,}13°)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A.B} = \frac{36{,}47\text{ km}^2}{(8{,}06\text{ km})(12\text{km})} = \frac{36{,}47\text{ km}^2}{96{,}72\text{ km}^2}$$

$\theta = 67{,}85°$

c) $$\vec{U}_B = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{(3{,}11\vec{i} + 11{,}59\vec{j})\text{ km}}{12\text{ km}} = 0{,}259\vec{i} + 0{,}966\vec{j}$$

$$\vec{A}_B = A.\cos\theta\,\vec{u}_B$$
$$\vec{A}_B = (8{,}06\text{ km})(\cos 67{,}85°)(0{,}259\,\vec{i} + 0{,}966\,\vec{j})$$
$$\vec{A}_B = (079\,\vec{i} - 294\vec{j})\text{km}$$

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{(8\,\vec{i} + \vec{j})\text{km}}{8{,}06\text{ Km}} = 0{,}993\,\vec{i} + 0{,}124\,\vec{j}$$

$$\vec{B}_A = B.\cos\theta\ .\vec{u}_A$$
$$\vec{B}_A = (12\text{km})(\cos 67.85°)(0{,}993\vec{i} + 0{,}124\vec{j})$$
$$\vec{B}_A = (4{,}49\,\vec{i} + 0{,}56\vec{j})\text{ km}$$

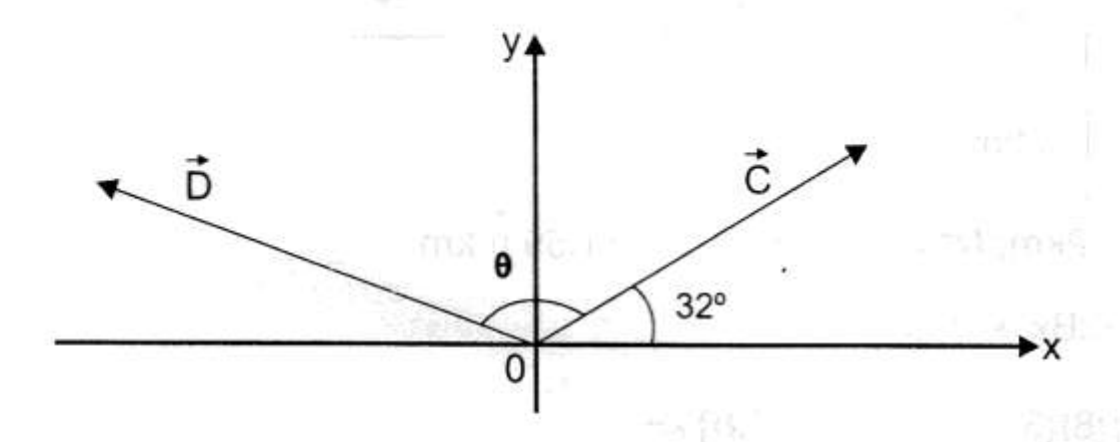
2. Dado el vector $\vec{C} = (45\text{m}; 32°)$ y el vector $\vec{D} = (-56\,\vec{i} + 21\,\vec{j})$m, calcular:

a) El producto escalar de $\vec{C}.\vec{D}$.

b) El ángulo formado por $\vec{C}$ y $\vec{D}$.

c) La proyección de $\vec{C}$ sobre $\vec{D}$.

d) La proyección de $\vec{D}$ sobre $\vec{C}$.



a) $\vec{C} = (45\text{m}; 32°) = (38{,}16\,\vec{i} + 23{,}85\,\vec{j})$ m.

$$\vec{D} = (-56\,\vec{i} + 21\vec{j})$$
$$\vec{C}.\vec{D} = CxDx + CyDy$$
$$\vec{C}.\vec{D} = [(38{,}16)(-56) + (23{,}85)(21)]\text{ m.}$$
$$\vec{C}.\vec{D} = -1636{,}11\text{ m}^2.$$

b) $\vec{D} = (-56\vec{i} + 21\,\vec{j})\text{ m} = (59{,}81\text{ m.}; 159{,}44°)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{C}.\vec{D}}{C.D} = \frac{-1636{,}11\text{m}^2}{(45\text{m})(59{,}81\text{m})} \Longrightarrow \theta = 127{,}44°$$

c) $\vec{u}_D = \frac{\vec{D}}{D} = \frac{(-56\vec{i} + 21\vec{j})}{59,81 \text{ m}} = -0,936\vec{i} + 0,351\vec{j}$

$\vec{C}_D = C.\cos\theta \ .\vec{u}_D$

$\vec{C}_D = (45\text{m})(\cos 127,44°)(-0,936\vec{i} + 0,351\vec{j})$

$\vec{C}_D = (25,61\vec{i} - 9,60\vec{j})\text{m}.$

d $\vec{u}_C = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{(32,16\vec{i} + 23,85\vec{j}) \text{ m.}}{45\text{m}} = 0,848\vec{i} + 0,530\vec{j}$

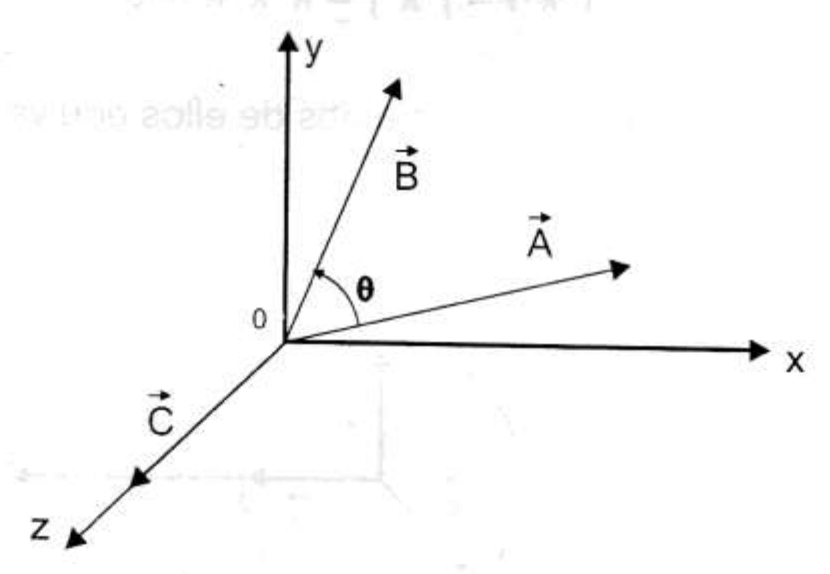
$\vec{D}_C = D.\cos\theta \ .\vec{u}_C$

$\vec{D}_C = (59,8 \text{ m})(\cos 127,44°)(0,848\vec{i} + 0,530\vec{j})$

$\vec{D}_C = (-30,83\vec{i} - 19,27\vec{j}) \text{ m}$

PRODUCTO VECTORIAL:

El producto vectorial o producto cruz de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, es otro vector $\vec{C}$, cuyo módulo se obtiene multiplicando los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por el seno del menor ángulo formado entre ellos. Su dirección es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y su sentido está dado por la regla del sacacorchos, que dice: se hace girar el primer vector de la operación hacia el segundo, por el camino más corto, y el sentido del vector resultante será el avance radial del sacacorhos.



El producto vectorial se representa intercalando el signo (x) entre los símbolos de los dos vectores:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \qquad \textbf{(1.5.10)}$$

Del gráfico de la página anterior se deduce:

El módulo de $\vec{C} = A.B.\text{sen}\,\theta$

La dirección de $\vec{C}$ es perpendicular al plano AB.

El sentido de $\vec{C}$ está dado por la regla del sacacorchos.

Puesto que sen0° = sen 180° = 0 y sen 90° = 1. de **(1.5.10)** se concluye que:

a) El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo ($\vec{u}_A = \vec{u}_B$)

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A.B.\text{sen}\ 0°$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A.B(0)$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = 0$$

b) El producto vectorial es máximo cuando los vectores son perpendiculares:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A.B.\text{sen}\ 90°$$

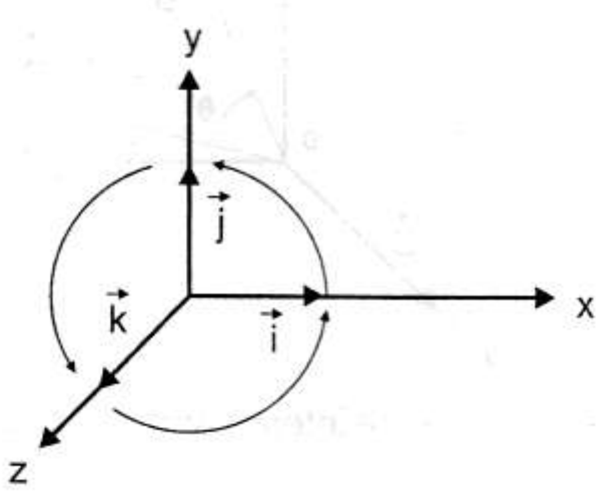
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A.B(1)$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A.B$$

Aumentando a los ejes ***x***, ***y*** un eje ***z*** perpendicular a ellos, y considerando $\vec{k}$ como el vector unitario en dicho eje, el producto vectorial de los vectores unitarios rectangulares es:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

En el ciclo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, el producto vectorial de dos de ellos equivale al que le sigue en el ciclo:



Si se inviene el orden, cambia el signo del resultado:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\quad$ $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\quad$ $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ $\quad$ $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

El producto vectorial de un vector por sí mismo es cero:

$$|\vec{A} \times \vec{A}| = A.A.\text{sen}0^\circ$$

$$|\vec{A} \times \vec{A}| = A^2(0)$$

$$|\vec{A} \times \vec{A}| = 0$$

El producto vectorial de dos vectores en función de sus vectores base es:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (Ax\vec{i} + Ay\vec{j}) \times (Bx\vec{i} + By\vec{j})$$

$$\vec{A}x\vec{B} = AxBx\,\vec{i} \times \vec{i} + AxBy\,\vec{i} \times \vec{j} + AyBx\,\vec{j} \times \vec{i} + AyBy\,\vec{j} \times \vec{j}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AxBx(0) + AxBy\,(\vec{k}) + AyBx\,(-\vec{k}.) + AyBy(0)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = AxBy\vec{k} - AyBx\,\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} Ax & Ay \\ Bx & By \end{vmatrix} \vec{k} \qquad (1.5.11)$$

Por tanto, de **(1.5.10):**

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A.B.\text{sen}\,\theta)\,\vec{k} \qquad (1.5.12)$$

Las propiedades del producto vectorial son:

$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$ $\quad$ ***No cumple la propiedad conmutativa.***

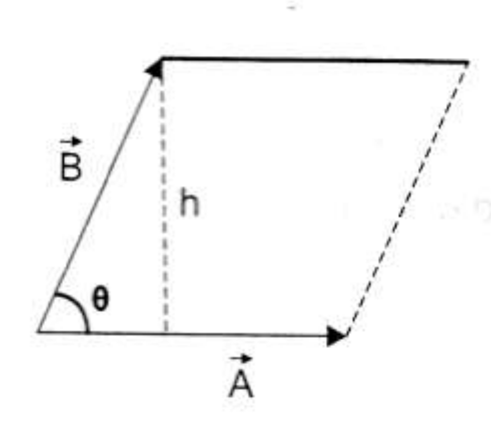
$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ $\quad$ ***Simetría alternada.***

$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ $\quad$ ***Distributiva con relación o la suma de vectores.***

$m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B})$

Algunas de las aplicaciones del producto vectorial son:

a) Cálculo del área de un paralelogramo:

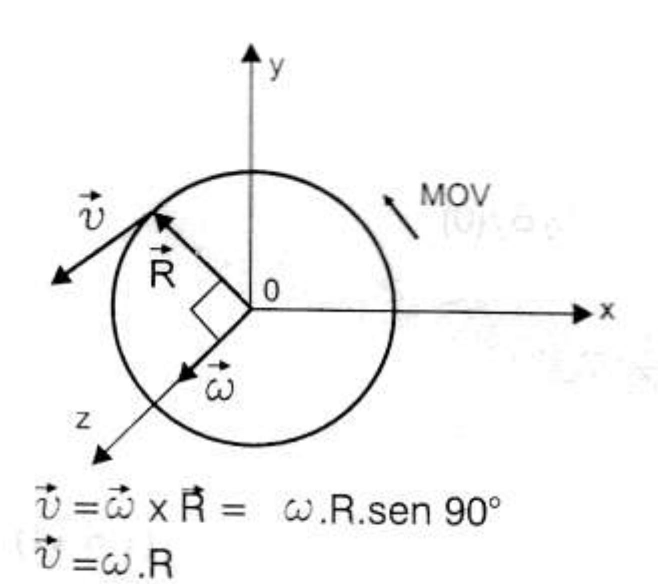


Área = base x altura
Área = A.h
Área = A.B.sen θ
Área = $|\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\text{Área} = \begin{vmatrix} Ax & Ay \\ Bx & By \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1.5.13)}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{h}{B} \qquad \Longrightarrow \qquad h = B\,\text{sen}\,\theta$$

b)Cálculo del vector velocidad lineal en el movimiento circular:

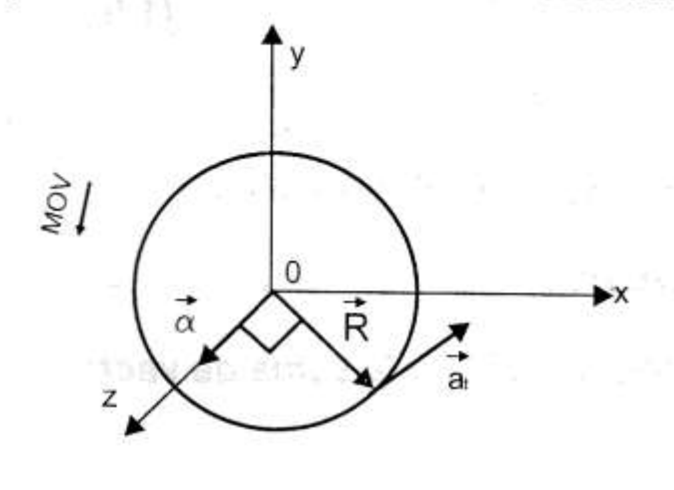


El vector $\vec{v}$ de un punto que se mueve con movimiento circular, es igual al producto vectorial del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ por el vector posición $\vec{R}$.

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} = \omega.R.\text{sen } 90°$

$\vec{v} = \omega.R$ **(1.5.14)**

c) *Cálculo del vector aceleración tangencial en el movimiento circular:*

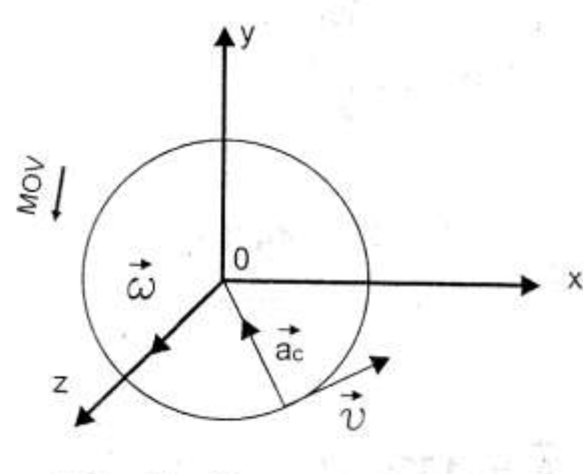


El vector $\vec{a}_t$ de un punto que se mueve con movimiento circular, es igual al producto vectorial del vector aceleración angular $\vec{\alpha}$ a por el vector posición $\vec{R}$.

$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{R} = \alpha.R.\text{sen}90°$

$\vec{a}_t = \alpha.R$ **(1.5.15)**

d) *Cálculo del vector aceleración centrípeta en el movimiento circular:*



El vector $\vec{a}_c$ de un punto que se mueve con movimiento circular, es igual al producto vectorial del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ por el vector velocidad lineal $\vec{v}$.

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \omega . v .\text{sen } 90°$$
$$\vec{a}_c = \omega . v \qquad (1.5.16)$$

EJEMPLOS

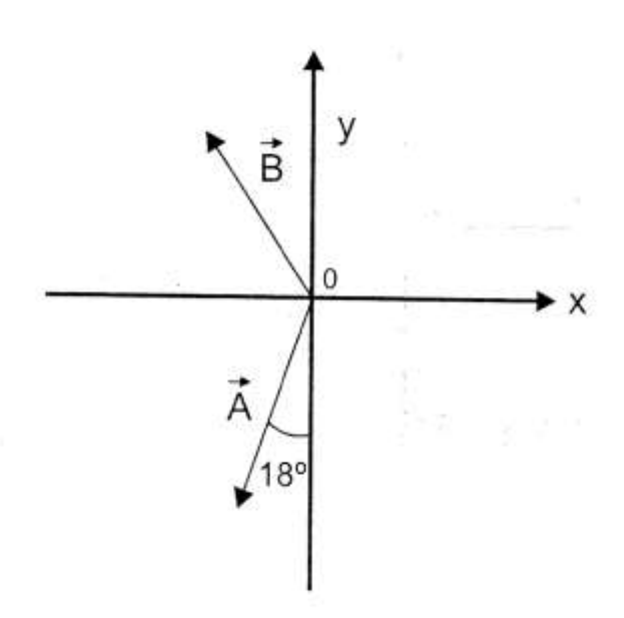
1. Dado el vector $\vec{A}$ = (60 km/h; S18°O) y el vector $\vec{B}$ = 50 km/h (-0,458 $\vec{i}$ + 0,889 $\vec{j}$), hallar:

a) El producto vectorial de $\vec{A} \times \vec{B}$ y $\vec{B} \times \vec{A}$.
b) El área del paralelogramo formado por los dos vectores.
c) El ángulo comprendido por los dos vectores

Expresamos los vectores en función de sus vectores base:

$\vec{A}$ = (60 k,m/h; S18°0) = (-18,54$\vec{i}$ - 57,06$\vec{j}$)km/h

$\vec{B}$ = 50 km/h (-0,458 $\vec{i}$+ 0,889 $\vec{j}$) = (-22,9$\vec{i}$ + 44,45 $\vec{j}$) km/h



a) $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} Ax & Ay \\ Bx & By \end{vmatrix} \vec{k}$ $\qquad$ $\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} Bx & By \\ Ax & Ay \end{vmatrix} \vec{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} -18,54 & -57,06 \\ -22,9 & 44,45 \end{vmatrix} \vec{k}$ $\qquad$ $\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} -22,9 & 44,45 \\ -18,54 & -57,06 \end{vmatrix} \vec{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = (-824,10 - 1306,67)\,\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{B} \times \vec{A} = (1306,67 + 824,10)\,\vec{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = -2130,77\,\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{B} \times \vec{A} = 2.130,77\,\vec{k}$

b) Área $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

Área $= 2130,77$ km²/h²

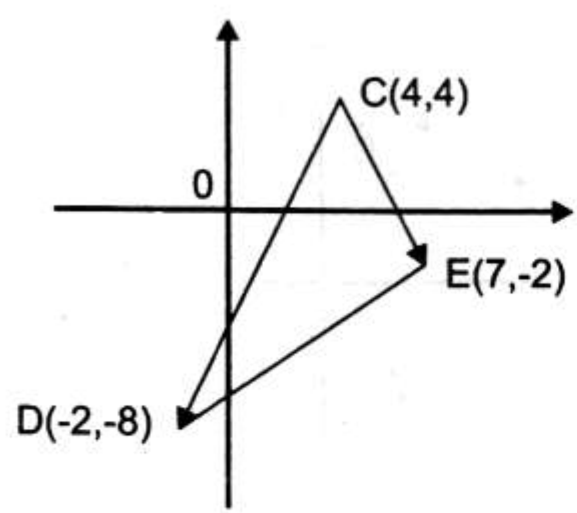
c) $|\vec{A} \times \vec{B}| = A.B.\text{sen}\,\theta$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{A.B}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{2130.77 \text{ km}^2/\text{h}^2}{(60 \text{ km/h})(50 \text{ km/h})}$$

$$\text{sen}\,\theta = 45,26°$$

2. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos: C(4, 4)m, D(-2, -8)m y E (7, -2)m:



$\vec{CD} = [(4+2)\vec{i} + (4+8)\vec{j}]\,m = (6\vec{i} + 12\vec{j})\,m.$

$\vec{CE} = [(4-7)\vec{i} + (4+2)\vec{j}]\,m = (-3\vec{i} + 6\vec{j})m$

$\text{Área} = \frac{1}{2}\,|\vec{CD} \times \vec{CE}|$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\,(36 + 36) = 36\ m^2$$

EJERCICIO N°4

1. Si la magnitud de los vectores $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son 40m y 30m respectivamente, determinar:

a) La magnitud máxima del vector resultante de la suma vectorial de $\vec{F} + \vec{G}$

b) La magnitud mínima del vector resultante de la suma vectorial de $\vec{F} + \vec{G}$

c) La magnitud del vector resultante de la suma vectorial en el caso de que $\vec{F}$ y $\vec{G}$ sean perpendiculares

d) La magnitud máxima del vector resultante de la resta vectorial de $\vec{F} - \vec{G}$

2. Dados los vectores $\vec{F} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ y $\vec{G} = -6\vec{i} - \vec{j}$, encontrar

a) El ángulo formado por los vectores

b) El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{F}$ y $\vec{G}$

c) El vector unitario en la dirección de $(\vec{F} - 2\vec{G})$

3. Dado el vector $\vec{Q} = (3,-5)$m, encontrar:

a) Un vector $\vec{P}$ perpendicular a $\vec{Q}$, de modo que su módulo sea de 17m y la coordenada ***Y*** sea positiva

b) El áera del paralelogramo formado por $\vec{Q}$ y $\vec{P}$

c) La proyección del vector $\vec{Q}$ sobre $\vec{P}$

4. Dados los vectores $\vec{P} = (12\vec{i} - 8\vec{j})$ m/s $\vec{Q} = (15\text{m/s}, 120°)$, encontrar:

a) $\vec{P} - \vec{Q}$

b) $\vec{Q} + \vec{P}$

c) $3/2\,\vec{P}$

d) $\vec{Q} \cdot \vec{P}$

e) El ángulo formado entre $\vec{Q}$ y $\vec{P}$

f) $\vec{P} \times \vec{Q}$

5. Dados los vectores $\vec{M} = (37, 25)$ m y $\vec{N} = (41\text{m}, 213°)$, hallar:

a) $\vec{M} + \vec{N}$

b) $\vec{N} - \vec{M}$

c) $-2\,\vec{N}$

d) $\vec{N} \cdot \vec{M}$

e) La proyección de $\vec{N}$ sobre $\vec{M}$

f) El área del paralelogramo formado por los dos vectores

6. Dados los vectores $\vec{E} = 15N(m\vec{i} + 0{,}48\vec{j})$ $\vec{I} = (21N, SE)$ y $\vec{F} = (12N, 312°)$, hallar:

a) $\vec{E} + \vec{I} + \vec{F}$

b) $2/3\,\vec{I} - 3\vec{E} + 5/2\,\vec{F}$

c) $2/5\,(\vec{F} \cdot \vec{E})$

d) $(3\vec{I} \times 2\vec{F})$

e) La proyección de $\vec{E}$ sobre el vector resultante de $(\vec{I} + \vec{F})$

f) El ángulo comprendido entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{E}$

EJERCICIO N°4

7. Dados los vectores
   $\vec{A}$= 31m/s (0,2$\vec{i}$ + m$\vec{j}$),
   $\vec{B}$= (43m/s, 172°) y $\vec{C}$= (55, -12)m/s, hallar:

   a) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$
   b) $\frac{1}{2}\vec{A} + \vec{B} - 2\vec{C}$
   c) El área del paralelogramo formado por $2\vec{A}$ y $\frac{2}{3}\vec{C}$
   d) La proyección de $(\vec{A} + \vec{B})$ sobre $\vec{C}$
   e) $(\vec{A} \times \vec{C}) + (\vec{A} \times \vec{B})$
   f) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

8. Tomando en consideración los vectores
   $\vec{R}$= (20m, N25°O), $\vec{S}$= (15$\vec{i}$ + 9$\vec{j}$)m
   $\vec{T}$= (30m, 260°) y $\vec{U}$= 17m (0,5$\vec{i}$ -0,866$\vec{j}$),
   hallar:

   a) $\frac{4}{3}(\vec{S}) - 2\vec{R} + \vec{U}$
   b) $5\vec{U} - \frac{1}{2}\vec{T} + \vec{R} - 2\vec{S}$
   c) $(\vec{R} \cdot \vec{S}) + (\vec{T} \cdot \vec{U})$
   d) $(\vec{T} \times \vec{U}) + (\vec{R} \times \vec{S})$
   e) $(3\vec{R}) \cdot 2(\vec{T})$
   f) La proyección de $(\vec{R} + \vec{S})$ sobre $(\vec{T} - \vec{U})$
   g) El área del paralelogramo formado por $(\vec{R}-\vec{T})$ y $(\vec{S} + \vec{U})$

9. Considere los vectores
   $\vec{A}$=46cm(m$\vec{i}$,-0,23$\vec{j}$), $\vec{B}$=(81cm,155°),
   $\vec{C}$=(57cm, N21°E) y $\vec{D}$=(-32$\vec{i}$-29$\vec{j}$)m,
   determinar:

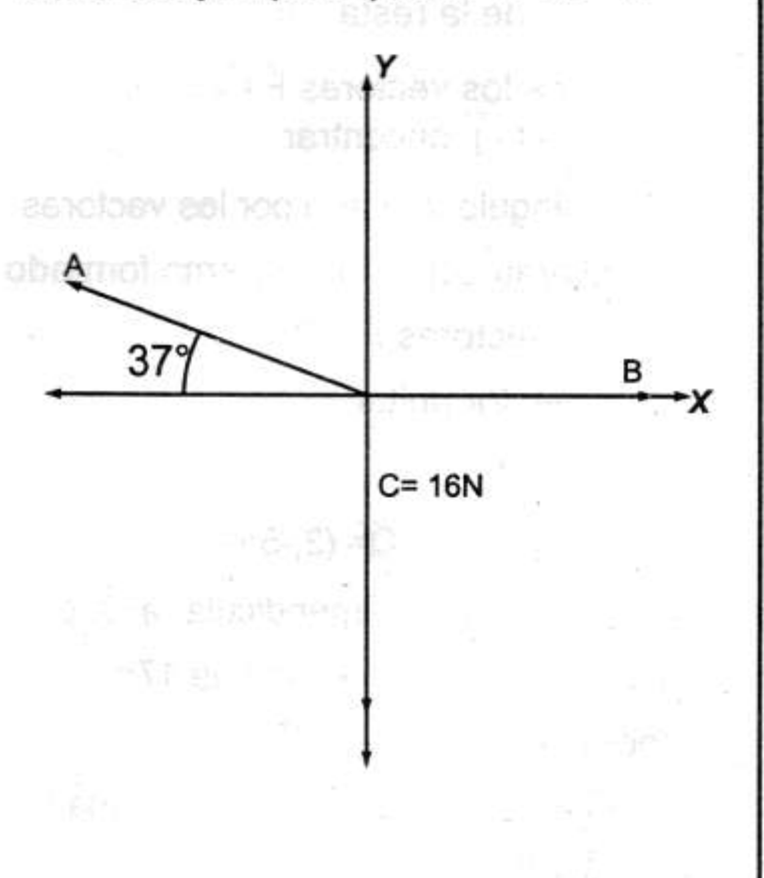
   a) $\frac{1}{2}\vec{A} + 2\vec{C} - \vec{B}$
   b) $2\vec{D} - 3\vec{A} + \frac{1}{3}\vec{C} - \frac{2}{5}\vec{B}$
   c) $(3\vec{B} + \frac{2}{3}\vec{A}) \cdot (-\vec{C} - \frac{4}{3}\vec{D})$
   d) $(\vec{D} - 3\vec{C}) \times (\frac{3}{2}\vec{B} + 4\vec{A})$
   e) $(\vec{B} \cdot \vec{A}) + (\vec{C} \cdot \vec{D})$
   f) $(2\vec{A} \times \vec{C}) + (5\vec{B} \times \vec{D})$
   g) El ángulo formado por $(\vec{D} - \vec{A})$ y $(\vec{B} + \vec{C})$

10. Dados los vectores $\vec{D}$ = (5km; 63°), $\vec{E}$ = (-7;-1)km y $\vec{F}$= (4km; S70°E), calcular:

    a) $2\vec{D} + \vec{E} + 3\vec{F}$
    b) $\vec{E} - \vec{D} - 2\vec{F}$
    c) $\vec{D} \cdot \vec{E}$
    d) $\vec{D} - (\vec{E} \times \vec{F})$
    e) La proyección de $\vec{E}$ sobre $\vec{D}$
    f) El ángulo comprendido entre $\vec{E}$ y $\vec{F}$
    g) El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$

11. Si la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es $2\vec{i} - 4\vec{j}$ y su diferencia es $6\vec{i} - 10\vec{j}$, encontrar el ángulo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

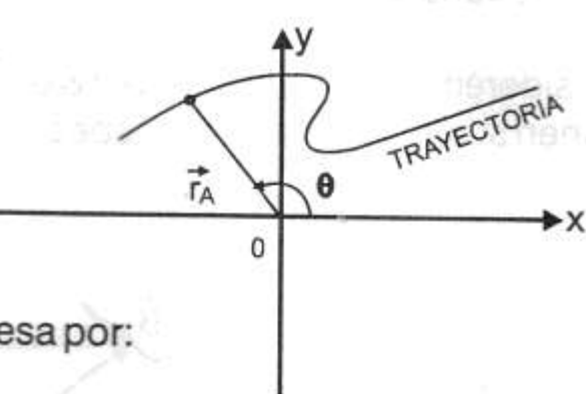
12. Determine las magnitudes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, para que $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$



1.6 VECTOR POSICION RELATIVA

VECTOR POSICIÓN. Para definir la posición A que ocupa una partícula en movimiento en un tiempo *t*, elegimos un sistema de referencia fijo ***Oxy***, y trazamos el vector $\vec{r}_A$, que une el origen del sistema de referencia con el punto A.

El vector $\vec{r}_A$ al estar definido por su módulo r y su dirección θ conrespecto a los ejes de referencia, determina la posición de una partícula respecto a dichos ejes. Este vector se llama ***vector posición***.

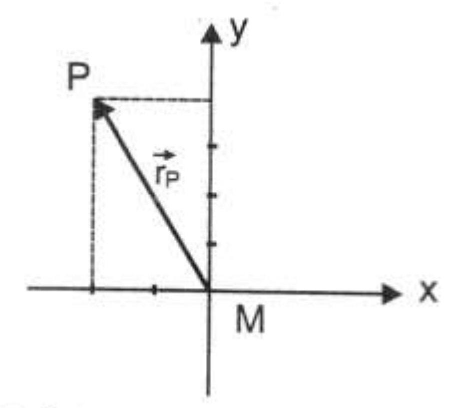


Matemáticamente el vector posición $\vec{r}_A$ se expresa por:

$$\vec{r}_A = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} \qquad (1.6.1)$$

EJEMPLOS

1. Una persona se encuentra en un punto de coordenadas(-2,4)km con respecto a una montaña. Determinar el vector posición de la persona respecto de la montaña.



$$\vec{r}_P = (-2,4)\text{km}$$

$$\vec{r}_P = (-2i+4j)\text{km}$$

2. Un helicóptero se encuentra a125 Km de la torre de control en dirección SI7°E. Determinar el vector posición del helicóptero.

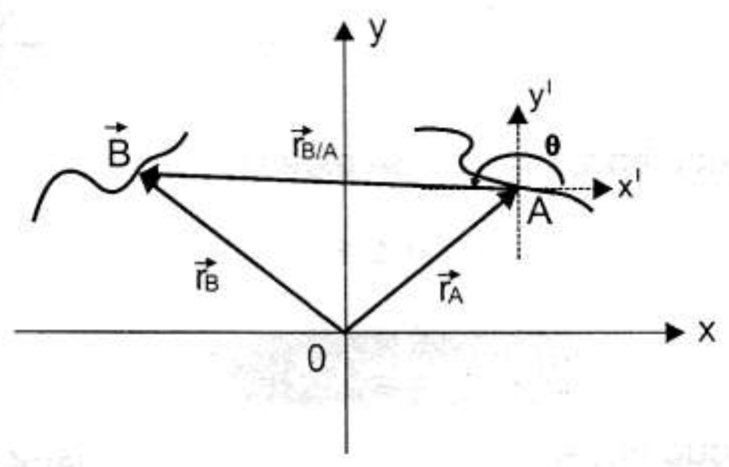
$$\vec{r}_H = (125\text{km};\ S17°E)$$

$$\vec{r}_H = (125\text{km};\ 287°)$$

$$\vec{r}_H = (36{,}55i - 119{,}54j)\ \text{km}$$

VECTOR POSICIÓN RELATIVA. En el vector posición se utilizó un sistema de referencia fijo. Existen situaciones en las que se utilizan simultáneamente varios sistemas de referencia, por lo que un mismo punto puede tener tantas posiciones como puntos de referencia se escojan. Si uno de ellos está ligado a tierra, diremos que es un sistema de referencia fijo, y los demás serán sistemas móviles de referencia. Sin embargo, la elección del sistema de referencia fijo es arbitraria; cualquier sistema puede designarse fijo y todos los demás, no unidos rígidamente a éste, se consideran móviles.

Consideremos las partículas A y B que se mueven en el plano ***Oxy***. Los vectores $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$ definen sus posiciones con respecto al sistema de referencia en un instante t.



Las posiciones de A y B se refieren a dos partículas diferentes que se mueven en un mismo instante y con referencia a un mismo punto.

La posición de la partícula B respecto de la partícula A ($\vec{r}_{B/A}$)es una cantidad vectorial porque tiene una magnitud (la distancia entre las dos partículas) y una dirección (θ) con respecto al. sistema móvil Ax'y'.

En la figura vemos que el vector $\vec{r}_B$ es la suma de los vectores $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_{B/A}$:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad \textbf{(1.6.2)}$$

$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad \textbf{(1.6.3)}$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

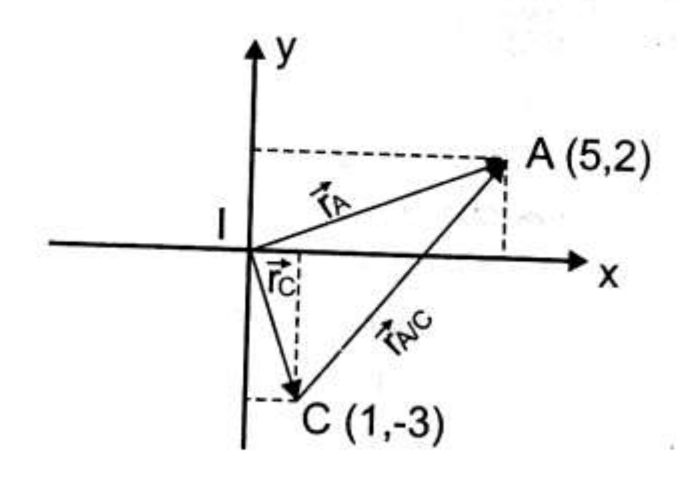
EJEMPLOS

1. Desde la torre de una iglesia se divisa un automóvil en las coordenadas (5; 2km) y un camión en las coordenadas (1; -3) km. Calcular:

a) La posición del automóvil con respecto al camión.

b) La posición del camión con respecto al automóvil.

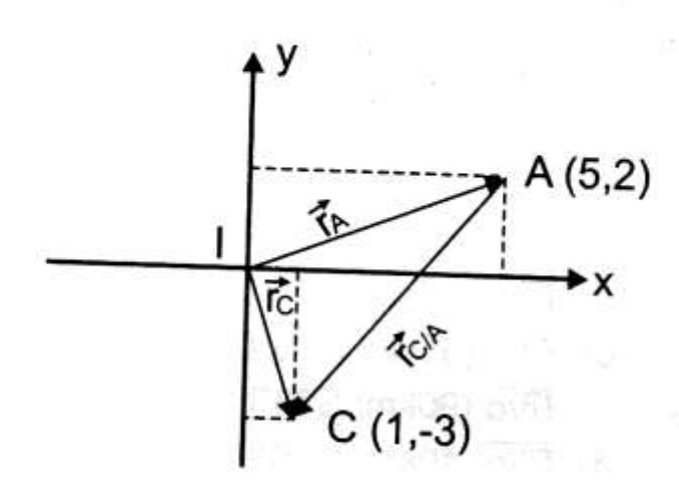
a)



$\vec{r}_A = (5;\ 2)$ km
$\vec{r}_A = (5\vec{i} + 2\vec{j})$ km
$\vec{r}_C = (1;\ -3)$ km
$\vec{r}_C = (i\ ;\ -3j)$ km

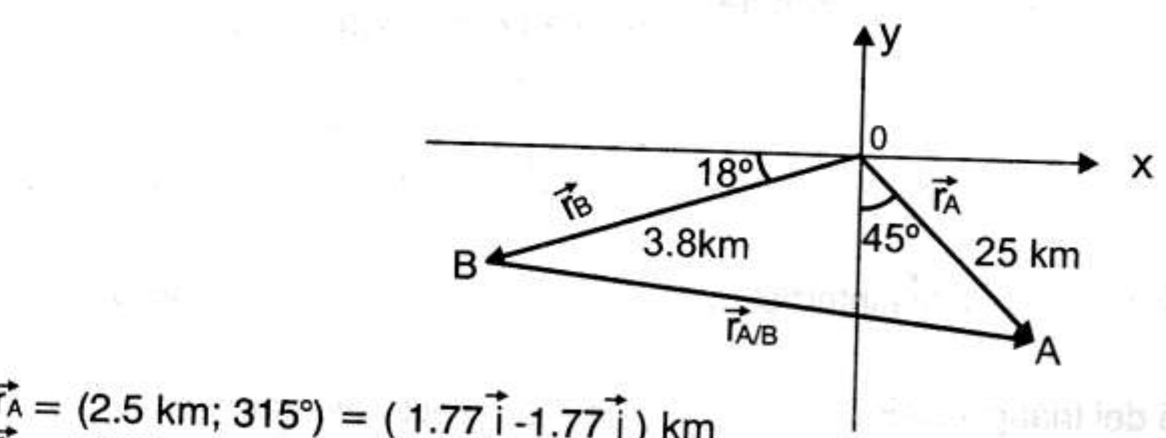
$\vec{r}_{A/C} = \vec{r}_A - \vec{r}_C$
$\vec{r}_{A/C} = (5\vec{i} + 2\vec{j})$ km $- (\vec{i} - 3\vec{j})$ km
$\vec{r}_{A/C} = (4\vec{i} + 5\vec{j})$ km

b)



$\vec{r}_{C/A} = \vec{r}_C - \vec{r}_A$
$\vec{r}_{C/A} = (\vec{i} - 3\vec{j})$ km $- (5\vec{i} + 2\vec{j})$ km
$\vec{r}_{C/A} = (-4\vec{i} - 5\vec{j})$ km

2. Si desde un observatorio instalado en la playa se ve un avión a una distancia de 2.5 km en dirección SE. y un barco a una distancia de 3.8 km en dirección S72°O. ¿cuál es la posición del avión respecto al barco?



$\vec{r}_A = (2.5\text{ km};\ 315°) = (1.77\vec{i} - 1.77\vec{j})$ km
$\vec{r}_B = (3.8\text{ km};\ 198°) = (-3.61\vec{i} - 1.17\vec{j})$ km
$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$
$\vec{r}_{A/B} = (1.77\vec{i} - 1.77\vec{j})$km $- (-3.61\vec{i} - 1.17\vec{j})$ km
$\vec{r}_{A/B} = (5.38\vec{i} - 0.60\vec{j})$km

EJERCICIO N° 5

1. En el reloj de una iglesia el minutero mide 1,2m y el horero 80cm. determinar la posición relativa del extremo del horero respecto al extremo del minutero, en las siguientes horas:

a) 10H10	d) 8H20	g) 2H40
b) 12H35	e) 9H10	h) 11H05
c) 5H40	f) 6H50	i) 4H00

2. Una persona vive a 2Km en dirección NE del centro de la ciudad, si para ir a la tienda más cercana camina 200m al este y luego 100 m al sur, determinar:

a) La posición de la tienda respecto del centro de la ciudad

b) La posición de la tienda respecto a la casa de la persona

c) La distancia en línea recta de la casa a la tienda

3. Los vertices de un triángulo son los puntos $P_1(0,5)$, $P_2(2,-1)$ y $P_3(3,6)$, determinar:

a) El valor de los ángulos internos del triángulo

b) El tipo de triángulo en función de sus lados

4. Los vertices de un triángulo son los puntos A(8,9)m, B(-6,1)m, C(0,-5)m, determinar:

a) El valor de los ángulos internos del triángulo

b) El área del triángulo ABC

5. Una ciudad está delimitada por las rectas que unen los vertices: P(4,5)km, Q(0,4)km, R(1,1)km, S(5,2)km, determinar:

a) La forma geométrica de la ciudad

b) El área de la ciudad

c) La posición relativa del punto R respecto del punto P

d) La posición relativa del punto S respecto del punto R

6. Se tiene las ciudades P, Q y R; determine la posición relativa de la ciudad P respecto a R para los siguientes casos:

a) $\overrightarrow{r_{P/Q}}$ (50km; S60°E) y $\overrightarrow{r_{R/Q}}$ (70km; NO)

b) $\overrightarrow{r_{P/Q}}$ (80km; SO) y $\overrightarrow{r_{R/Q}}$ (25km; N70°O)

c) $\overrightarrow{r_{P/Q}}$ (65km; N15°O) y $\overrightarrow{r_{R/Q}}$ (90km; S30°O)

d) $\overrightarrow{r_{P/Q}}$ (40km; N75°E) y $\overrightarrow{r_{R/Q}}$ (100km; S25°E)

7. Para los casos del ejercicio anterior. Si se construye una carretera directa en línea recta desde la ciudad P hacia la ciudad R, determine el ahorro de combustible para un auto que consume 1 galón de gasolina por cada 45km, si se compara el nuevo camino con la ruta que une las ciudades P hacia Q y Q hacia R en línea recta.

8. Dados los puntos L(8,-6)m y J(-4,3)m, determinar:

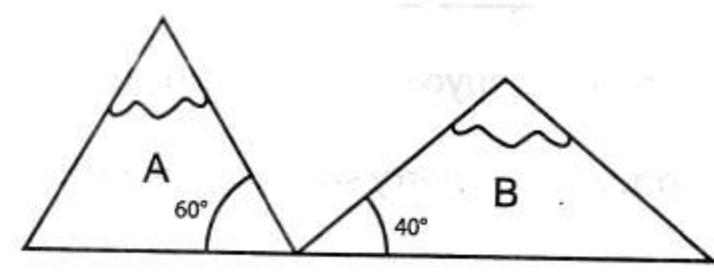
a) Los vectores posición de $\vec{L}$ y $\vec{J}$ respecto al origen

b) La posición relativa de $\vec{L}$ con respecto a $\vec{J}$

c) La distancia entre los puntos L y J

EJERCICIO N°5

9. La cumbre de la montaña A está a 3km del suelo y la cumbre de la montaña B a 2km del suelo. Si las montañas se unen como indica el siguiente gráfico:



Determinar:

a) La posición relativa de la cumbre de la monaña B respecto a la cumbre de la montaña A

b) La longitud del cable para instalar un teleférico de la cumbre de la montaña A a la cumbre de la montaña B

10. Las coordenadas de los puntos inicial y final de un vector $\vec{E}$ son (5,-2)m y (-4,7)m respectivamente, determinar:

a) Las componentes rectangulares del vector $\vec{E}$

b) La magnitud del vector $\vec{E}$

c) El vector unitario del vector $\vec{E}$

11. Un avión de aeromodelismo está a (4km, SO) de la torre de control. En ese momento, su dueño desea impactar en un blanco que está ubicado en el punto (6,-4)km, determinar:

a) La posición del avión respecto al blanco

b) La dirección que debe tomar el avión para logar su proposito.

c) La distancia del avión al blanco.

12. En un aeropuerto, un avión B se halla parqueado en la posición (200m; N28°E) respecto a la torre de control. En ese instante otro avión A se encuentra en la posición (200m; SO), respecto a la misma torre de control, determinar:

a) La posición relativa de B respecto de A

b) La distancia que existe entre los dos aviones

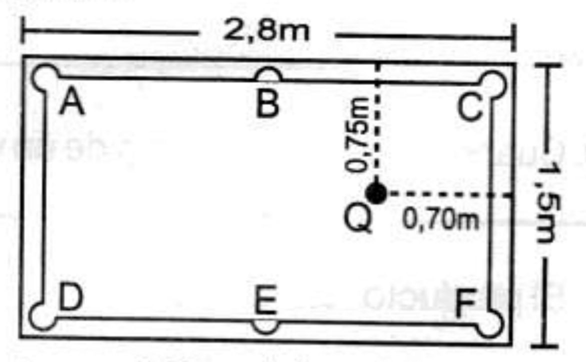
13. Un bote tiene 2 motores fuera de borda. El primer motor impulsa al bote en dirección NO con una velocidad de 20m/s, el segundo motor impulsa al bote en dirección N25°E con una velocidad de 15m/s, determinar:

a) La velocidad resultante del bote en magnitud y dirección

b) El vector unitario del vector velocidad resultante

c) Los ángulos directores del vector velocidad resultante

14. Una mesa de billar tiene las siguientes dimensiones:



a) La posición relativa de la buchaca F respecto a la buchaca A

b) La posición relativa de la buchaca C respecto a la buchaca E

c) El ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{EA}$ y $\overrightarrow{EC}$

d) La posición relativa de una bola ubicada en el punto Q respecto a la buchaca D

e) La proyección del vector $\overline{AE}$ sobre $\overline{AQ}$

1.7 EVALUACION OBJETIVA

COMPLETAR:

1. El producto escalar de $\vec{i} \cdot \vec{i}$ es ______________________

2. El vector ______________________ es aquel cuyo módulo es la unidad.

3. Cuando dos o más vectores tienen igual módulo, dirección y sentido se dice que son ______________________

4. Al par ordenado (r,θ) se lo denomina coordenadas ______________________

5. Cuando el punto de aplicación de un vector se traslada a lo largo de su línea de acción, el vector se llama ______________________

6. ______________________ es todo aquello que puede ser medido.

7. El producto vectorial de $\vec{j} \times \vec{j}$ es ______________________

8. α y β son los denominados ángulos ______________________

9. Vector es un ______________________ orientado

10. Cuando las componentes de un vector son perpendiculares entre sí, se llaman ______________________

11. El producto ______________________ entre dos vectores cumple con la propiedad conmutativa.

12. El vector unitario se obtiene dividiendo el vector por ______________________

13. El producto vectorial de $\vec{i} \times \vec{j}$ es ______________________

14. En el sistema de coordenadas rectangulares. al eje de las *y* se le denomina

____.

15. Todo vector es igual al producto de su módulo por ____________________

16. Magnitudes ______________________ son las que se forman mediante la combinación de las magnitudes fundamentales.

17. El vector unitario determina la ____________________ de un vector dado.

18. El producto vectorial de dos vectores ____________________ es 0.

19. El producto escalar de los vectores ______________________ es igual al producto de sus módulos.

20. El producto ______________________ de dos vectores es un escalar.

ESCRIBIR VERDADERO (V) O FALSO(F) :

1. El producto vectorial no cumple con la propiedad conmutativa .... (   )

2. El vector posición tiene como punto inicial el origen del sistema de referencia .... (   )

3. La velocidad y el desplazamiento son magnitudes escalares .... (   )

4. La longitud de un segmento orientado, representa la dirección del vector.......... (   )

5. El producto punto de dos vectores es otro vector .... (   )

6. El producto punto no cumple con la propiedad conmutativa .... (   )

7. El producto (cruz) de dos vectores es otro vector.. (   )

8. En el sistema de coordenadas rectangulares, al eje de las x se le denomina

eje de las ordenadas .... ( )

9. Cuando el punto de aplicación de un vector no debe moverse, el vector

se llama nulo .... ( )

10. El producto de un escalar por un vector es un vector .... ( )

11. El producto vectorial cumple con la propiedad conmutativa .... ( )

12. Todo vector puede expresarse como la suma vectorial de sus componentes ( )

13. El vector posición relativa se refiere a una partícula en dos tiempos diferentes ( )

14. El producto escalar de $\vec{i} \cdot \vec{j}$ es 1 .... ( )

15. Al par ordenado (r, rumbo) se le denomina coordenadas geográficas .... ( )

16. La diferencia de vectores no cumple con la propiedad conmutativa .... ( )

17. El producto escalar de un vector por sí mismo es 0 .... ( )

18. La suma de vectores cumple con la propiedad conmutativa .... ( )

19. Magnitudes fundamentales son las que no se definen en términos de otras .

magnitudes .... ( )

20. El producto escalar de dos vectores paralelos es igual al producto de sus

respectivos módulos .... ( )

SUBRAYAR LA RESPUESTA CORRECTA:

1. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es:

a) otro vector
b) 0
c) 1
d) ninguna de las respuestas anteriores

2. El vector posición relativa se refiere a:

a) Dos partículas diferentes en un mismo tiempo.
b) Dos partículas diferentes en dos tiempos diferentes.
c) Una partícula en un mismo tiempo.
d) Una partícula en dos tiempos diferentes.

3. El producto vectorial de $\vec{i} \times \vec{i}$ es:

a) Nulo
b) 1
c) Máximo
d) $\vec{k}$

4. El producto punto de $\vec{j} \cdot \vec{i}$ es:

a) Nulo
b) 1
c) Máximo
d) $-\vec{k}$

5. $\vec{i}, \vec{j}$ son vectores:

a) Iguales
b) Paralelos
c) Unitarios
d) Negativos

6. El producto cruz de dos vectores paralelos es:

a) 0
b) $\vec{i}$
c) $\vec{j}$
d) $\vec{k}$

7. Es una magnitud vectorial:

a) El tiempo.
b) La velocidad.
c) La masa.
d) La distancia.

8) Magnitudes escalares son aquellas que tienen:

a) Magnitud. dirección y sentido.
b) Magnitud
c) Dirección y sentido.
d) Ninguna de las respuestas anteriores

9. El producto vectorial es máximo cuando los vectores son:

a) Perpendiculares.
b) Paralelos .
c) Iguales.
d) Negativos.

10. Es una magnitud escalar:

a) El desplazamiento.
b) La velocidad.
c) La posición.
d) La distancia.

11. El ángulo director que forma el vector con el eje positivo de las ***y*** se denomina:

a) Alfa
b) Beta
c) Gamma
d) Teta

12. El valor de cada ángulo director de un vector, varía entre:

a) 0° y 360°
b) 0° y 180°
c) 0° y 90°
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

13. Al par ordenado (r, θ) se denomina, coordenadas:

a) Rectangulares
b) Geográficas
c) Polares
d) Espaciales

14. El producto vectorial de $\vec{j} \times \vec{i}$ es:

a) Nulo
b) 1
c) $\vec{k}$
d) $-\vec{k}$

15. El producto cruz de un vector por sí mismo es:

a) Nulo
b) 1
c) Máximo
d) $-\vec{k}$

16. El producto escalar de $\vec{j} \cdot \vec{j}$ es:

a) Nulo
b) 1
c) $\vec{k}$
d) $-\vec{k}$

17. El producto punto de dos vectores paralelos y de sentido contrario es:

a) 0
b) Positivo
c) Negativo
d) $\vec{k}$

18. La longitud del segmento orientado, representa:

a) El módulo del vector.
b) La dirección y el sentido del vector.
c) El módulo y el sentido del vector.
d) El módulo y la dirección del vector.

19. El vector unitario de un vector dado, determina:

a) El módulo del vector.
b) La dirección del vector.
c) El módulo y dirección del vector.
d) Ninguna de las respuestas anteriores

20. Cuando el punto de aplicación de un vector se traslada a cualquier punto del plano sin alterar el efecto de su acción, el vector se llama:

a) Libre
b) Deslizante
c) Fijo
d) Nulo

2. CINEMÁTICA

2.1 DEFINICIONES GENERALES

NOCIÓN DE CINEMÁTICA. Todas las cosas del mundo físico están en movimiento: desde las más grandes hasta las más pequeñas. Este fenómeno ha despertado un interés natural en el hombre, desde el inicio, por entenderlo, predecirlo y controlarlo.

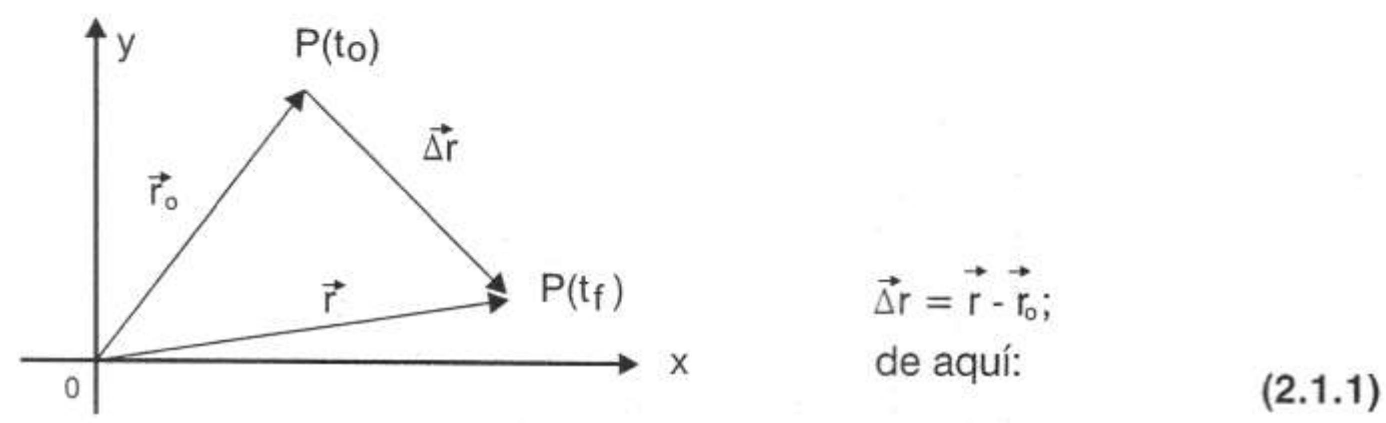
DEFINICIÓN. La Cinemática analiza el movimiento y lo representa en términos de relaciones fundamentales. En este estudio no se toman en cuenta las causas que lo generan, sino el movimiento en sí mismo.

PARTÍCULA. En el estudio del movimiento, un cuerpo es considerado como una partícula si sus dimensiones son despreciables en relación con las magnitudes de las distancias analizadas. Por ejemplo, una pelota de fútbol en relación con la cancha, un avión en relación con un vuelo entre dos ciudades, etc.

Geométricamente, una partícula asocia la idea de un punto, por lo que generalmente se le denomina ***punto material o masa puntual.***

SISTEMA DE REFERENCIA. Es un cuerpo (partícula) que, junto a un sistema de coordenadas, permite determinar la ubicación de otro cuerpo, en un instante dado. La descripción del movimiento depende del sistema de referencia con respecto al cual se le defina. En cada análisis el sistema de referencia se considera fijo. De manera general, se hacen los estudios tomando como referencia la tierra, o sea, para un observador ***inmóvil*** en la superficie de la tierra.

VECTOR DESPLAZAMIENTO ($\vec{\Delta r}$). Es la variación que experimenta el vector posición de una partícula, en un cierto intervalo de tiempo t:



$\vec{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_o$;

de aquí: **(2.1.1)**

$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\Delta r}$ Esta es la ecuación que representa el objetivo del estudio de la Cinemática: poder determinar cuál es la posición ($\vec{r}$) de una partícula en cualquier instante, para lo cual es necesario conocer de dónde partió ($\vec{r}_o$) y cuál es su desplazamiento ($\vec{\Delta r}$).

UNIDADES. El desplazamiento es una magnitud vectorial, cuyas unidades son las de una longitud:

En el SI: $\vec{r} - \vec{r}_o = \vec{\Delta r}$

$[m] - [m] = [m]$

Equivalencias: 1 m = 100 cm

En el Técnico: $\vec{r} - \vec{r}_o = \vec{\Delta r}$

$[m] - [m] = [m.]$

Dimensiones: $\vec{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_o$

$[\vec{\Delta r}] = [L - L]$

$[\vec{\Delta r}] = [L]$

En el CGS: $\vec{r} - \vec{r}_o = \vec{\Delta r}$

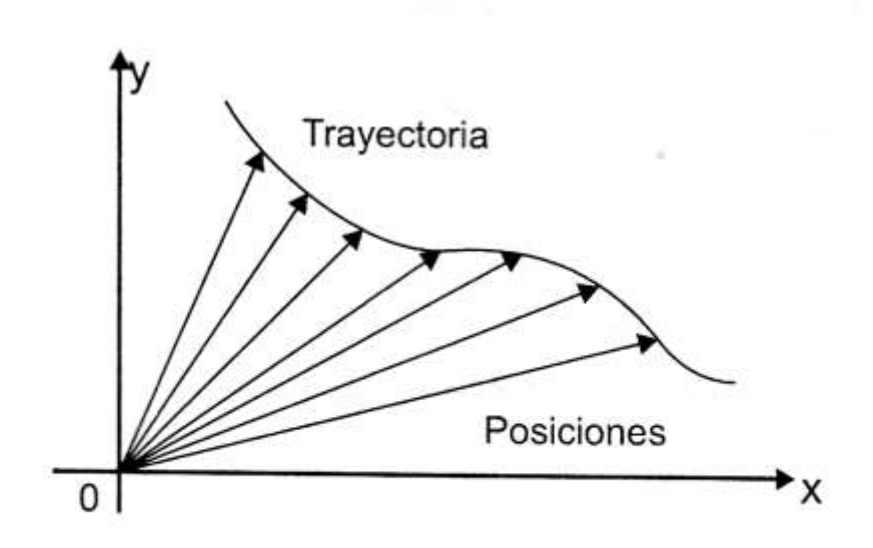
$[cm] - [cm] = [cm]$

En función del vector posición, se puede definir lo que significa el reposo y el movimiento de una partícula:

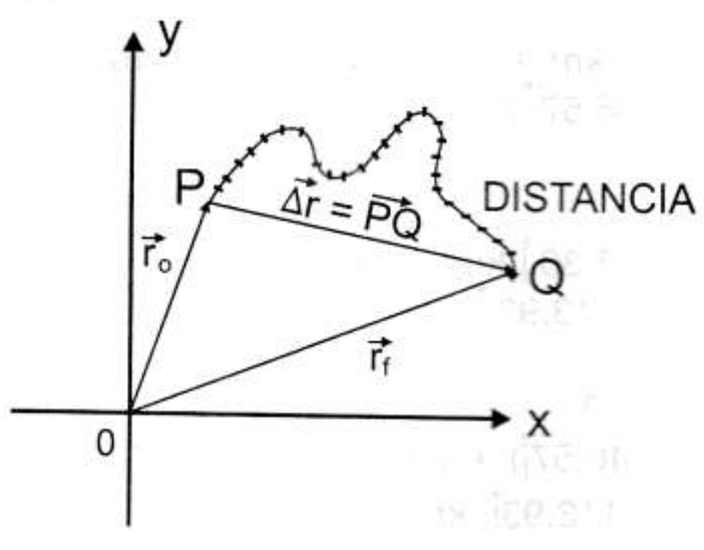
Reposo.- Una partícula está en reposo durante un cierto intervalo de tiempo, cuando su posición ($\vec{r}$) permanece constante dentro de un mismo sistema de referencia.

Movimiento.- Una partícula está en movimiento durante un cierto intervalo de tiempo, cuando su posición ($\vec{r}$) cambia dentro de un mismo sistema de referencia.

TRAYECTORIA. Es la línea que resulta de unir las diferentes posiciones que ocupó una partícula al moverse de un lugar a otro. .



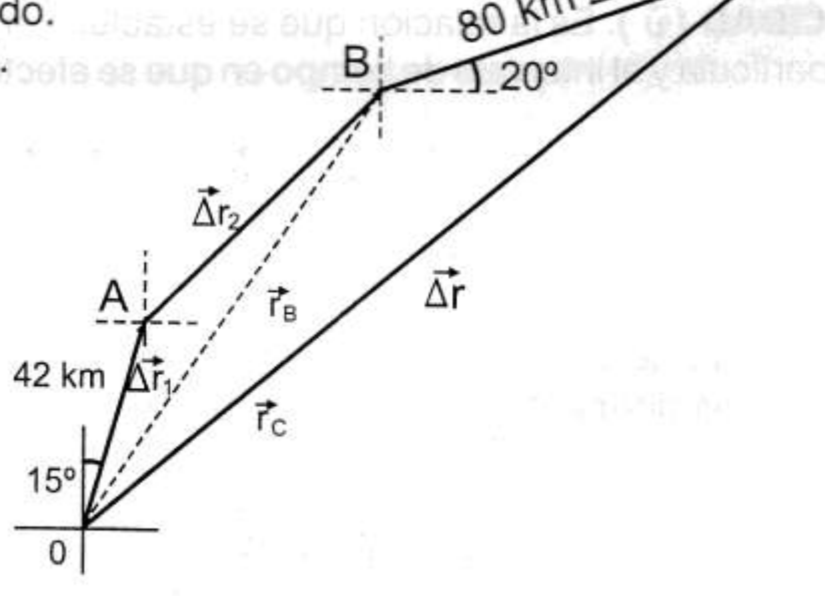
DISTANCIA RECORRIDA (d). Es la longitud medida sobre la trayectoria recorrida por la partícula al moverse de una posición a otra. Es conveniente aclarar que la distancia recorrida entre dos puntos, sí depende de la trayectoria, a diferencia de lo que sucede con el desplazamiento, que es independiente de ésta y sólo depende de la posición inicial y de la posición final:



EJEMPLOS

1. Para ir de una ciudad a otra, un vehículo recorre por carreteras rectas. Primero (42 km; N15°E), luego $(46\vec{i} + 46\vec{j})$ km y finalmente (80 km; 20°). Determinar:

a) Los desplazamientos realizados.
b) Los vectores posición de cada punto.
c) El desplazamiento total realizado.
d) El módulo del desplazamiento.
e) La distancia recorrida.



a) $\vec{\Delta r_1}$ = (42 km; N15°E) = (42 km; 75°) = $(10,87\vec{i} + 40,57\vec{j})$ km

$\vec{\Delta r_2}$ = $(46\vec{i} + 46\vec{j})$ km

$\vec{\Delta r_3}$ = (80km; 20°) = $(75,18\vec{i} + 27,36\vec{j})$ km

b) $\Delta\vec{r}_1 = \vec{r}_A - \vec{r}_0$

$\vec{r}_A = (10{,}87\,\vec{i} + 40{,}57\,\vec{j})$ km

$\Delta\vec{r}_2 = \vec{r}_A - \vec{r}_B$

$\vec{r}_B = \Delta\vec{r}_2 + \vec{r}_A$

$\vec{r}_B = (46\,\vec{i} + 46\,\vec{j})$ km $+ (10{,}87\,\vec{i} + 40{,}57\,\vec{j})$ km

$\vec{r}_B = (56{,}87\,\vec{i} + 86.57\vec{j}\,)$ km

$\Delta\vec{r}_3 = \vec{r}_C - \vec{r}_B$

$\vec{r}_C = \Delta\vec{r}_3 + \vec{r}_B$

$\vec{r}_C = (75{,}18\,\vec{i} + 27{,}36\,\vec{j})$km $+ (56{,}87\,\vec{i} + 86{,}57\,\vec{j})$km

$\vec{r}_C = (132{,}05\,\vec{i} + 113{,}93\,\vec{j})$ km

c) $\vec{\Delta} r = \vec{\Delta r_1} + \vec{\Delta r_2} + \vec{\Delta r_3}$

$\vec{\Delta r} = [(10{,}87\,\vec{i} + 40{,}57\vec{j}) + (46\,\vec{i} + 46\,\vec{j}) + (75{,}18\,\vec{i} + 27{,}36\,\vec{j})]$ km

$\vec{\Delta r} = (132{,}05\vec{i} + 113{,}93\vec{j})$ km

d) $\Delta r^2 = [(132{,}05)^2 + (113{,}93)^2\,]$

$\Delta r = 174{,}41$ km

e) $d_1 = \Delta r_1 = 42$ km

$d_2 = \Delta r_2 = \sqrt{(46)^2 + (46)^2}$ km $= 65{,}05$ km

$d_3 = \Delta r_3 = 80$km

$d = d_1 + d_2 + d_3$

$d = 42$ km $+ 65{,}05$ km $+ 80$ km

$d = 187{,}05$ km.

VELOCIDAD ($\vec{v}$). Es la relación que se establece entre el desplazamiento realizado por la partícula y el intervalo de tiempo en que se efectuó;

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

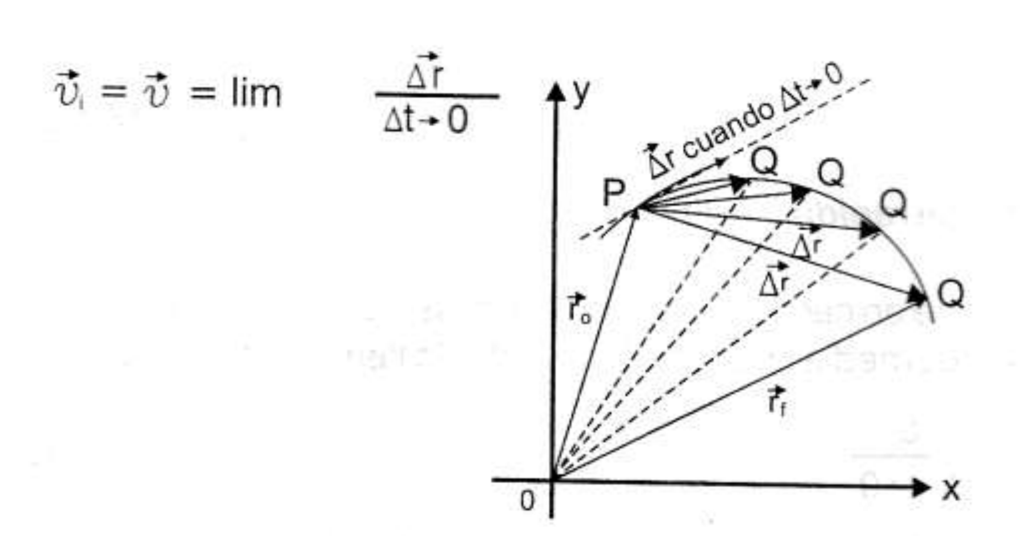
Si el intervalo de tiempo (Δt) es apreciablemente mayor que cero ($\Delta t >> 0$), la velocidad anteriormente definida se denomina ***velocidad media:***

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \qquad \text{si } \Delta t >> 0 \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

Definida así, la velocidad no tiene mayor significado físico. De manera general, interesa saber qué sucede en cada instante, por lo que si el intervalo de tiempo se toma cada vez más pequeño, como para que sea casi cero (tienda a cero), la velocidad se aproximará a un valor límite.

A esta velocidad se la denomina ***velocidad instantánea***. Matemáticamente, la velocidad instantánea se define como:

$$\vec{v}_i = \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



Al disminuir el valor de Δt, Q se aproxima a P y en el límite cuando $\Delta t \to 0$, Q prácticamente coincide con P. Por tanto, $\vec{PQ} = \Delta \vec{r}$ toca en un punto tangencialmente a la trayectoria.

Unidades. La velocidad es una magnitud vectorial, cuyas unidades son las de una longitud divididas por las de tiempo:

En el SI:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$$

$$\frac{[m]}{[s]} = \left[\frac{m}{s}\right]$$

En el técnico:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$$

$$\frac{[m]}{[s]} = \left[\frac{m}{s}\right]$$

En el CGS:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$$

$$\frac{[cm]}{[s]} = \left[\frac{cm}{s}\right]$$

Equivalencia:

$$1 \left|\frac{m}{s}\right| = 100 \left[\frac{cm}{s}\right]$$

$$1 \left|\frac{m}{s}\right| = 1 \frac{\frac{1}{100}\,[km]}{\frac{1}{3600}\,[h]}$$

$$1 \left|\frac{m}{s}\right| = 3,6 \left[\frac{km}{h}\right]$$

Dimensiones:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$[\vec{v}] = \frac{[L]}{[T]}$$

$$[\vec{v}] = [LT^{-1}]$$

RAPIDEZ (v). Es la relación que se establece entre la distancia recorrida por la partícula, al. moverse de una posición a otra, y el intervalo de tiempo en que se realizó:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \qquad (2.1.5)$$

Si $\Delta t >> 0$, toma el nombre de ***rapidez media***.

Si interesa la rapidez que tiene en cada instante la partícula, hay que encontrar el límite al. cual se aproxima la rapidez media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero:

$$v_i = v \quad \lim \frac{d}{\Delta t \to 0} \qquad (2.1.6)$$

La ***rapidez instantánea*** es, además, igual al módulo de la velocidad instantánea:

$$v_i = |\vec{v}_i|$$

EJEMPLO

Un avión de pasajeros vuela rectilíneamente (450km; 17°) en 25 min ,Luego, (180km; N 18°0) en 12 min y, finalmente, $(-285\vec{i} - 43\vec{j})$km en 20 min. Determinar:

a) Los desplazamientos realizados.
b) La distancia total recorrida.
c) La velocidad media en cada desplazamiento.
d) La rapidez media en cada desplazamiento.

a) $\vec{\Delta r}_1 = (450km;\ 17°) = (430,34\vec{i} + 131,57\vec{j})$ km
$\vec{\Delta r}_2 = (180$ km; NI8°0$) = (180$ km; $108°) = (-55,62\vec{i} + 171,19\vec{j})$ km
$\vec{\Delta r}_3 = (-285\vec{i} - 43\vec{j})$ km

b) $d_1 = \Delta r$
$d_1 = 450$ km

$d_2 = \Delta r_2$
$d_2 = 180$ km

$d_3 = \Delta r_3 = \sqrt{(-285)^2 + (-43)^2}$ km
$d_3 = 288,23$ km

$d = d_1 + d_2 + d_3$
$d = 450$ km $+ 180$ km $+ 288,23$ km
$d = 918,23$ km

c) $\vec{v}_{m1} = \dfrac{\Delta r_1}{\Delta t_1} = \dfrac{(430,34\,\vec{i} + 131,57\vec{j})\ km}{25\ min} = \dfrac{(430,34\,\vec{i} + 131,57\,\vec{j})\ km}{0,42\ h}$

$\vec{v}_{m1} = (1024,62\,\vec{i} + 313,26\,\vec{j})\ km/h$

$\vec{v}_{m2} = \dfrac{\Delta \vec{r}2}{\Delta t2} = \dfrac{(-55,62\,\vec{i} + 171,19\,\vec{j})\ km}{12\ min} = \dfrac{(-55,62\,\vec{i} + 171,19\,\vec{j})\ km}{0,2\ h}$

$\vec{v}_{m2} = (-278,10\,\vec{i} + 855,95\,\vec{j})\ km/h$

$\vec{v}_{m3} = \dfrac{\Delta \vec{r}3}{\Delta t3} = \dfrac{(-285\,\vec{i} - 43\,\vec{j})\ km}{20\ min} = \dfrac{(-285\,\vec{i} - 43\,\vec{j})\ km}{0,33\ h}$

$\vec{v}_{m3} = (-863,64\,\vec{i} - 130,30\,\vec{j})\ km/h$

d) $v_{m1} = \dfrac{d1}{\Delta t1} = \dfrac{450\ km}{25\ min} = \dfrac{450\ km}{0,42\ h} = 1071,43\ km/h$

$v_{m2} = \dfrac{d1}{\Delta t1} = \dfrac{180\ km}{12\ min} = \dfrac{180\ km}{0,2\ h} = 900\ km/h$

$v_{m3} = \dfrac{d1}{\Delta t1} = \dfrac{288,23\ km}{20\ min} = \dfrac{288,23\ km}{0,33\ h} = 873,42\ km/h$

ACELERACIÓN ($\vec{a}$). Es la relación que se establece entre la variación de la velocidad que experimenta una partícula y el tiempo en que se realizó tal variación:

$$a = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{t - t_o} \qquad \textbf{(2.1.7)}$$

Si $\Delta t >> 0$, se denomina ***aceleración media:***

$$\vec{a}_m = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} \qquad \textbf{(2.1.8)}$$

La aceleración tiene la misma dirección y sentido que el vector cambio de velocidad $\overrightarrow{\Delta v}$

Para calcular la ***aceleración instantánea***, hay que tomar intervalos de tiempo tan pequeños como para que tiendan a cero, y tendremos:

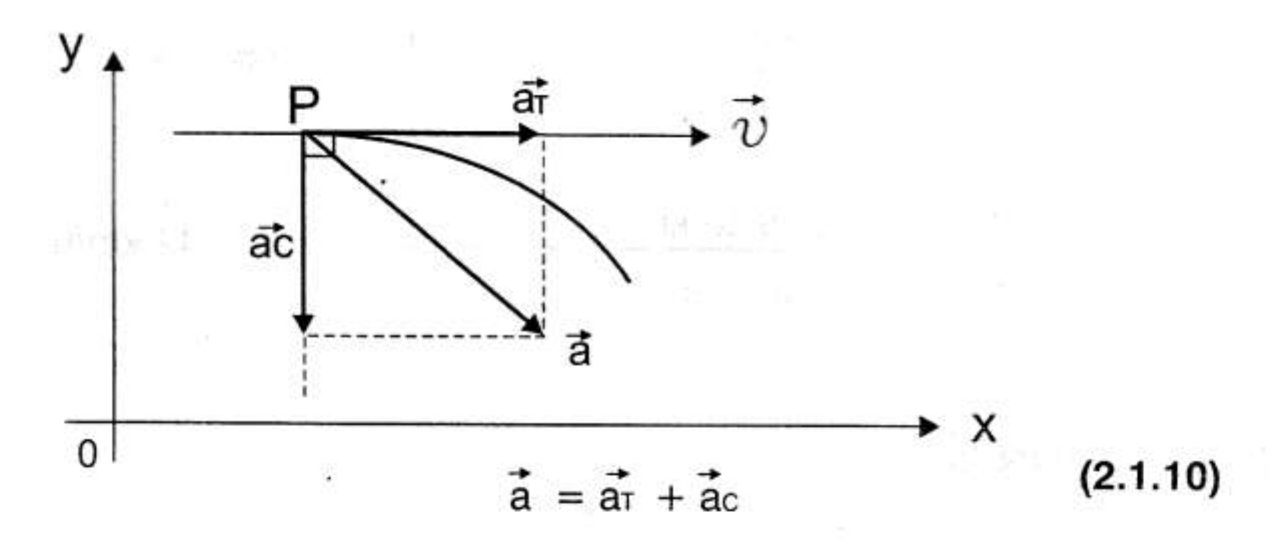
$$\vec{a} = \vec{a}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad \textbf{(2.1.9)}$$

La aceleración mide los cambios que experimenta el vector velocidad en el transcurso del tiempo, pero la velocidad - por ser un vector - puede cambiar en módulo y, o, dirección.

El cambio en módulo del vector velocidad, determina la aceleración tangencial o lineal ($\vec{a}_T$), cuya dirección es tangente a la trayectoria.

El cambio en la dirección del vector velocidad, determina la aceleración normal o centrípeta ($\vec{a}_c$), cuya dirección es perpendicular a la velocidad y está dirigida hacia el centro de la trayectoria.

El cambio en módulo y dirección del vector velocidad, determina la aceleración total ($\vec{a}$), cuya dirección dependerá de la aceleración tangencial y centrípeta:



$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c \qquad \textbf{(2.1.10)}$$

Unidades. La aceleración es una magnitud vectorial, cuyas unidades son las de una variación de velocidad divididas por las de tiempo:

En el SI: $\dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}$ En el CGS: $\dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}$

$$\frac{[m/s]}{[s]} = \frac{m}{s^2} \qquad \frac{[cm/s]}{[s]} = \frac{cm}{s^2}$$

En el Técnico: $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \vec{a}$

$$\frac{[m./s]}{[s]} = \frac{m}{s^2}$$

Equivalencias: $1 \left|\dfrac{m}{s^2}\right| = 100 \dfrac{cm}{s^2}$

$$1 \left|\frac{m}{s^2}\right| = 1\frac{\frac{1}{100}\ [km]}{\frac{1}{12960000}\ [h^2]} = 12960 \frac{km}{h^2}$$

Dimensiones: $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

$$[\vec{a}] = \frac{[L\,T^{-1}]}{[T]}$$

$$[\vec{a}] = [LT^{-2}]$$

EJEMPLOS

Un vehículo aumenta su velocidad de $(16\vec{i} - 21\vec{j})$ m/s a $(-32\vec{i} - 26\vec{j})$ m/s en 8 s. Determinar:

a) El vector unitario de la velocidad inicial.
b) El vector unitario de la velocidad final.
c) La aceleración media producida por el motor.

a) $\vec{v}_0 = (16\vec{i} - 21\vec{j})$ m/s $= (26{,}40$m/; $307{,}3°)$

$$\vec{u}_{v0} = \frac{\vec{v}_0}{v_0} = \frac{(16\vec{i} - 21\vec{j})\ m/s}{26{,}40\ m/s} = 0{,}606\vec{i} - 0{,}795\vec{j}$$

b) $v = (-32\vec{i} - 26\vec{j})$ m/s $= (41{,}23$ m/s; $219{,}09°)$

$$u_v = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(-32\vec{i} - 26\vec{j})\ m/s}{41{,}23\ m/s} = -0{,}776\vec{i} - 0{,}631\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{(-32\vec{i} - 26\vec{j})\ m/s - (16\vec{i} - 21\vec{j})\ m/s}{8\ s}$$

$$\vec{a} = \frac{(-48\vec{i} - 5\vec{j})m/s}{8\ s}$$

$$\vec{a} = (-6\vec{i} - 0{,}625\vec{j})\ m/s^2$$

2. Un móvil cuya aceleración constante es de $(1{,}41\vec{i} + 1{,}96\vec{j})\ m/s^2$, alcanza una velocidad de
$(95\vec{i} - 48\vec{j})$ km/h en 18 s. Determinar:

a) El vector unitario de la aceleración.
b) El vector unitario de la velocidad final.
c) La velocidad que tuvo a los 3 segundos.

a) $\vec{a} = (1{,}41\vec{i} + 1{,}96\vec{j})\ m/s^2 = (2{,}41 m/s^2; 54{,}27°)$

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{(1{,}41\vec{i} - 1{,}96\vec{j})\ m/s^2}{2{,}41\ m/s^2} = 0{,}584\vec{i} + 0{,}812\vec{j}$$

b) $\vec{v} = (95\vec{i} - 48\vec{j})$ km/h = (106,44 km/h;333,2°) = (29,57 m/s; 333,2°) =
$= (26{,}4\vec{i} - 13{,}33\vec{j})\ m/s$

$$u_v = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(26{,}4\vec{i} - 13{,}33\vec{j})\ m/s}{29{,}57\ m/s} = 0{,}893\vec{i} + 0{,}451\vec{j}$$

c) $\vec{a} = \dfrac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}$

$\vec{a}(t - t_0) = \vec{v} - \vec{v}_0$

$\vec{v}_0 = \vec{v} - \vec{a}(t - t_0)$

$\vec{v}_0 = (26{,}4\vec{i} - 13{,}33\vec{j})\ m/s - (1{,}41\vec{i} + 1{,}96\vec{j})\ m/s^2(18 - 3)\ s$

$\vec{v}_0 = (26{,}4\vec{i} - 13{,}33\vec{j})\ m/s - (1{,}41\vec{i} + 1{,}96\vec{j})\ m/s^2\ (15\ s)$.

$\vec{v}_0 = (26{,}4\vec{i} - 13.33\vec{j})m/s - (21{,}15\vec{i} + 29{,}4\vec{j})m/s$

$\vec{v}_0 = (5{,}25\vec{i} - 42{,}73\vec{j})\ m/s$

EJERCICIO N°6

1. Un insecto se mueve rectilíneamente 8cm al Este, luego 12cm al NE y finalmante 5cm al Sur; determinar:

a) Los desplazamientos realizados.
b) El desplazamiento total realizado.
c) El módulo del desplazamiento total.
d) La distancia total recorrida.

2. Comenzando en el origen de coordenadas se hacen los siguientes desplazamientos en el plano XY: 45mm en la dirección Y (-); 30 mm en la dirección X (-) y 76mm a 200°, todos en línea recta; determinar:

a) Los desplazamientos realizados.
b) Los vectores posición en cada punto.
c) El desplazamiento total realizado.
d) El módulo del desplazamiento.
e) La distancia recorrida.

3. Un auto parte a las 7h00 de una ciudad A (-85;204)km y la lectura de su odómetro es 10235 km, viaja rectilíneamente hacia B (123;347) km y llega a las 11h10; determinar:

a) Los vectores posición de cada ciudad.
b) El desplazamiento realizado.
c) La lectura del odómetro cuando llega a B.
d) La velocidad media.
e) La velocidad media con la que debería regresar de inmediato por la misma ruta para llegar a las 14h15.

4. Dos aviones parten del mismo punto, el uno viaja a (865 km; 15°) hasta A y el otro vuela $(-505\vec{i} + 253\vec{j})$km hasta B en 2 horas en línea recta; determinar:

a) Los vectores posición de los puntos A y B.
b) Los desplazamientos realizados por cada avión.
c) La velocidad media de cada avión.
d) La rapidez media de cada avión.
e) La velocidad media a la que debería viajar un avión desde A hasta B para tardar 3 horas en línea recta.

5. Una partícula cuya velocidad era de $(12\vec{i} + 15\vec{j})$m/s se detiene en 20s por una ruta rectilínea; determinar:

a) El módulo de la velocidad inicial.
b) El vector unitario de la velocidad inicial.
c) El vector velocidad final.
d) La aceleración media de la partícula.

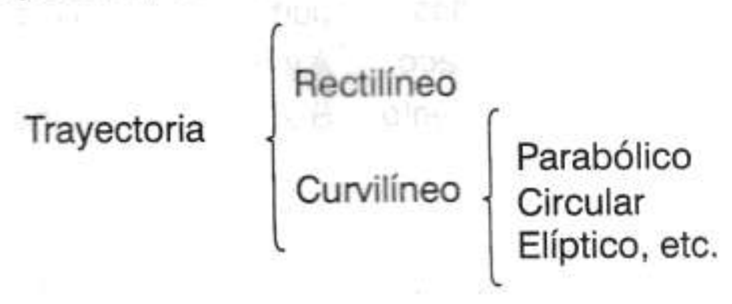
6. Un móvil que viaja con una aceleración constante, cambia su velocidad de $(-21\vec{i} - 18\vec{j})$m/s a (24m/s; S30°E); en 10s determinar:

a) Los vectores unitarios de la velocidad inicial y final.
b) La aceleración media.

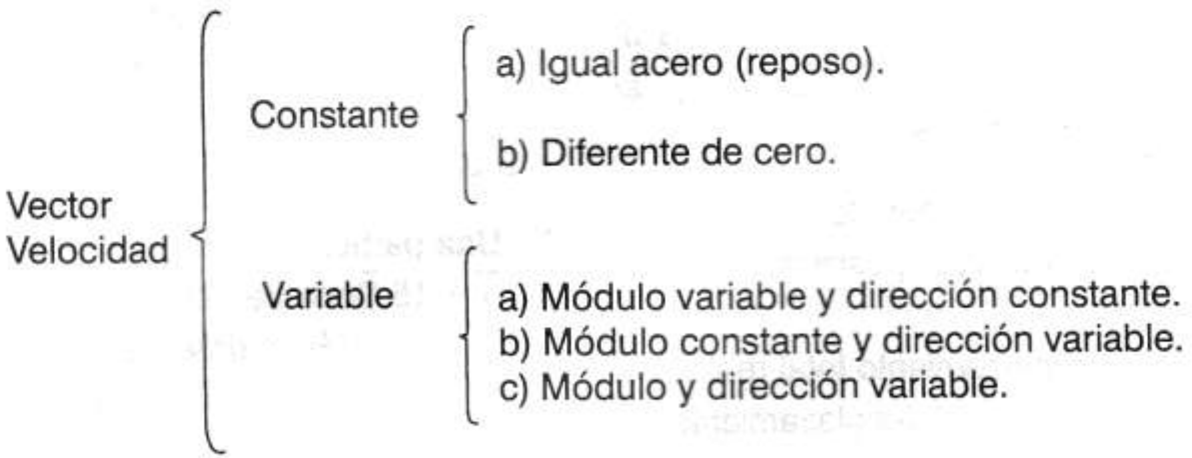
2.2 MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS. Los parámetros en función de los cuales se realiza la clasificación de los movimientos pueden ser: la forma de la trayectoria y las características del vector velocidad en función del tiempo.

De acuerdo con la trayectoria, los movimientos se clasifican en:



De acuerdo con las características del vector velocidad, los movimientos se clasifican en:



Casos particulares de movimiento. Los movimientos más importantes, y cuyas características se estudiarán, son: rectilíneos, parabólicos y circulares.

MOVIMIENTOS RECTILINEOS. Son aquellos cuya trayectoria es una línea recta y el vector velocidad permanece constante en dirección, pero su módulo puede variar. Es importante recordar que la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria, por lo que el vector velocidad puede variar en dirección si la trayectoria es curvilínea; si es rectilínea, permanece constante.

Los movimientos rectilíneos se clasifican, entonces, según varíe o no el módulo del vector velocidad: si se mantiene constante, el movimiento se denomina rectilíneo uniforme *(MRU)*; si varía, se llama movimiento rectilíneo variado (MRV). De este último sólo se analizará el caso en que la variación sea constante, uniforme; o sea, el movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV).

Como hemos visto, la velocidad en el movimiento rectilíneo sólo puede variar en módulo. Por tanto, la aceleración únicamente puede ser tangencial, ya que la aceleración normal se genera cuando la velocidad cambia de dirección.

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \cancelto{0}{\vec{a}_c}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_T \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

El desplazamiento tendrá la misma dirección y el mismo sentido (u opuestos) que la velocidad y aceleración ($\vec{U}_{\Delta r} = \pm \vec{U}_{v} = \pm \vec{U}_{a}$). Por ello, para facilitar el análisis de estos movimientos,generalmente se hace coincidir un eje de referencia (x o y) con la dirección de la trayectoria.

MOVIMIENTO RECTILíNEO UNIFORME (MRU). El de un móvil en el que la velocidad ($\vec{v}$) permanece constante en módulo, dirección y sentido.

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \text{cte.}$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{v}.\Delta t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}.\Delta t$$

Si se hace coincidir el eje x con la dirección del movimiento, y se toma un tiempo t al. interior del intervalo Δt donde $\vec{v}$ es constante, se tendrá:

$$x = x_0 + v.t \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

$$\Delta x = v.t$$

Se ha eliminado la notación vectorial porque todos los vectores tienen la misma dirección (mismo unitario).

La aceleración está definida por:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$,pero como $\vec{v}$ es constante, entonces $\Delta\vec{v} = 0$ y

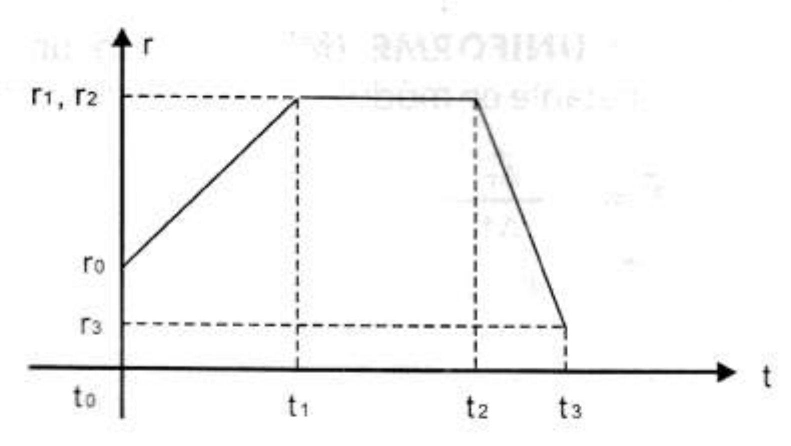
$a = 0$, es decir que en el MRU la aceleración es nula.

La ecuación **(2.2.2)** se enuncia generalmente como una propiedad del MRU. afirmando que una partícula con dicho movimiento, recorre distancias iguales en tiempos iguales.

Para obtener una visión rápida de la forma en que varían las componentes de la posición ($\vec{r}$),de la velocidad ($\vec{v}$) y de la aceleración ($\vec{a}$) de un cuerpo durante su movimiento, conviene representar gráficamente estas magnitudes; además, en muchos casos la información de las características del movimiento viene dada en forma de gráficos. Por ello, es importante saber interpretarlos.

En los gráficos se toma siempre el tiempo a lo largo del eje horizontal, y las otras magnitudes a lo largo del eje vertical.

Gráfico componente de la posición vs. tiempo (r x t). En el MRU la posición de un cuerpo en función del tiempo está definida por $r = r_0 + v.t$, lo que significa que la posición es proporcional al tiempo y, por lo tanto, su representación gráfica es una recta cuya inclinación depende del módulo de la velocidad (rapidez).

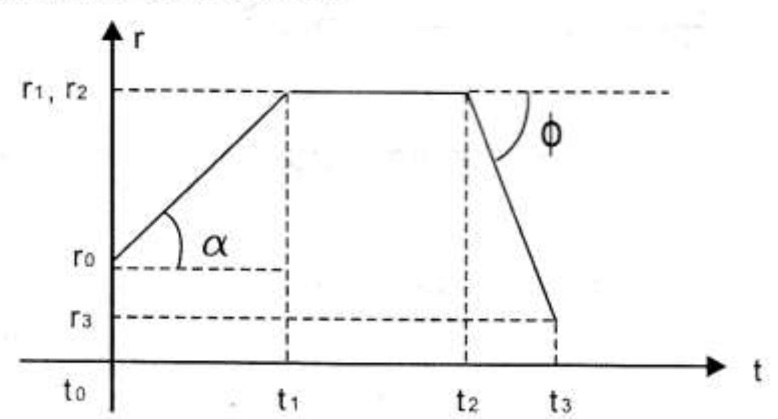


En el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, la curva indica que el cuerpo cambia proporcionalmente de posición en el sentido positivo del eje ***x.***

En el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$, la curva es paralela al eje del tiempo e indica una situación en la que el cuerpo no tiene movimiento, ya que no existe cambio de posición ($\Delta r_2 = 0$)

En el intervalo $t_2 \leq t \leq t_3$, la curva indica que el cuerpo cambia proporcionalmente de posición en sentido contrario al eje ***x*** (regresa).

Un gráfico posición vs tiempo, relaciona directamente a la componente de la posición y al tiempo. La magnitud no mostrada directamente es la rapidez, que está representada por la pendiente de la curva:



En el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, la pendiente representa la rapidez del cuerpo en el sentido positivo del eje **x**:

$$m_1 = \text{tag}\ \alpha = \frac{r_1 - r_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta r_1}{\Delta t_1} = \upsilon_1 = \text{cte.}$$

En el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ la pendiente indica que el cuerpo estuvo en reposo, ya que su rapidez es cero:

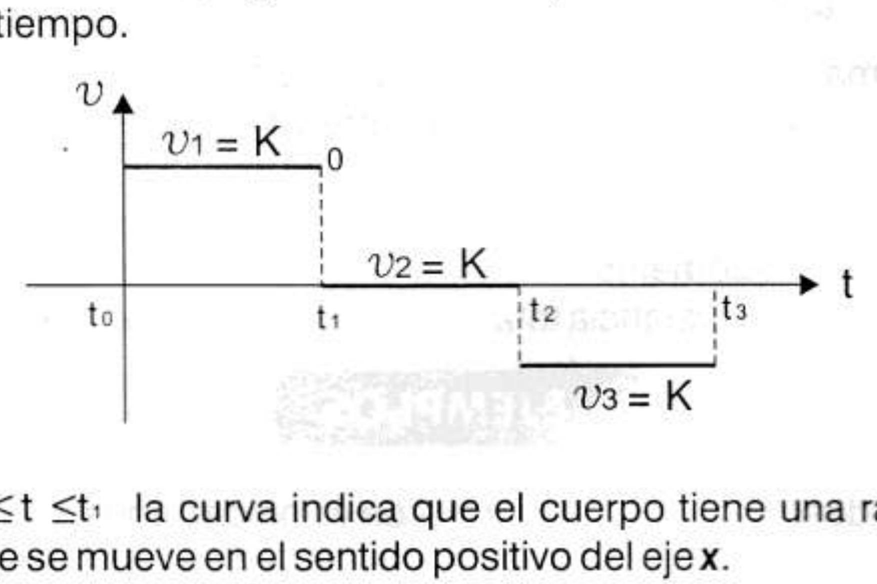
$$m_2 = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta r_2}{\Delta t_2} = \frac{0}{\Delta t_2} = 0 = \upsilon_2$$

En el intervalo $t_2 \leq t \leq t_3$ la pendiente representa la rapidez del cuerpo en sentido contrario al eje **x**:

$$m_3 = \text{tag}\ \phi \quad \frac{r_3 - r_2}{t_3 - t_2} = -\frac{\Delta r_3}{\Delta t_3} = -\upsilon_3 = \text{ cte, porque } r_3 < r_2$$

Como la pendiente representa el valor de la componente de la rapidez, a mayor pendiente mayor rapidez.

Gráfico componente de la rapidez vs. tiempo (υ x t). En el MRU la velocidad no varía con el tiempo; por esta razón, la gráfica de la componente de la velocidad es una recta paralela al eje del tiempo.

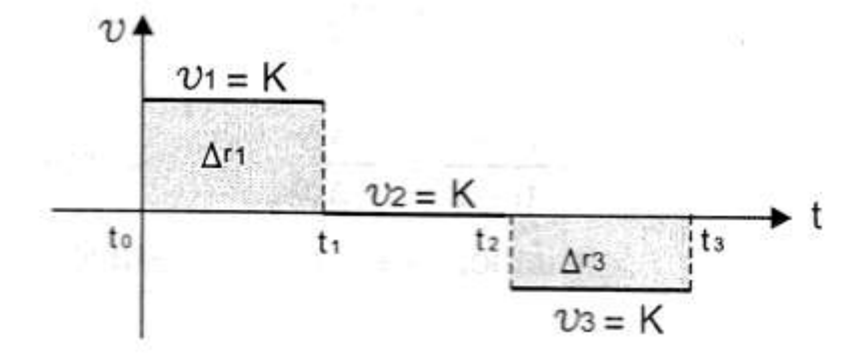


En el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$ la curva indica que el cuerpo tiene una rapidez constante, positiva: por lo que se mueve en el sentido positivo del eje **x**.

En el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$, la curva indica que el cuerpo tiene rapidez nula, lo que significa que no tiene movimiento.

En el intervalo $t_2 \leq t \leq t_3$, la curva indica que el cuerpo tiene una rapidez constante, negativa. Se mueve en el sentido negativo del eje **x**.

Una gráfica rapidez vs. tiempo, relaciona directamente a la componente de la rapidez y al tiempo. La magnitud no mostrada directamente es el módulo del desplazamiento, representado por el área comprendida entre la curva de la gráfica y la escala del tiempo:



En el intervalo $t_0 \leq t \leq t_1$, el área representa la distancia recorrida por el cuerpo en el sentido positivo del eje ***x:***

$$\Delta r_1 = v_1 (t_1 - t_0)$$

En el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$, no existe área. Significa que no existe distancia recorrida por el cuerpo:

$$\Delta r_2 = v_2 (t_2 - t_1) = 0(t_2 - t_1) = 0$$

En el intervalo $t_2 \leq t \leq t_3$, el área representa la distancia recorrida por el cuerpo en sentido negativo del eje ***x***:

$$\Delta r_3 = v_3 (t_3 - t_2)$$

Si se realiza la suma algebraica de las áreas, considerando positivas las que están sobre el eje de los tiempos, y negativas las que están por debajo, obtendremos el módulo del desplazamiento en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_F$

Si se efectúa la suma geométrica de las áreas, considerando Δr_1 , Δr_3 positivos, obtendremos el valor de la distancia total recorrida en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_F$

EJEMPLOS

1. Una partícula se desplaza $(-45\vec{i} + 61\vec{j})$ km, con velocidad constante, durante 48 min. Determinar:

a) La velocidad en kh/h.

b) La rapidez en m/s.

c) El vector unitario de la velocidad.

d) El vector unitario del desplazamiento.

a) $\vec{\Delta r} = \vec{v} . \Delta t$

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{(-45\vec{i} + 61\vec{j})\text{km}}{48 \text{ min}} = \frac{(-45\vec{i} + 61\vec{j})\text{km}}{0,8 \text{ h}}$$

$$\vec{v} = (-56,25\vec{i} + 76,25\vec{j}) \text{ km/h}$$

b) $\vec{v} = (-56{,}25\,\vec{i} + 76{,}25\,\vec{j})$ km/h

$\vec{v} = (94{,}753 \text{ km/h}; 126{,}42°)$

$v = 94{,}753$ km/h

$v = 26{,}32$ m/s

c) $$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(-56{,}25\,\vec{i} + 76{,}25\vec{j}) \text{ km/h}}{94{,}753 \text{ km/h}} = (-0{,}594\,\vec{i} + 0{,}805\,\vec{j})$$

d) $\Delta\vec{r} = (-45\,\vec{i} + 61\,\vec{j})$ km $= (75{,}8 \text{ km}; 126{,}42°)$

$$\vec{u}_v = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta r} = \frac{(-45\,\vec{i} + 61\,\vec{j}) \text{ km}}{75{,}8 \text{ km}} = (-0{,}594\,\vec{i} + 0{,}805\,\vec{j})$$

2. Una partícula que se mueve con una velocidad constante de $(65\vec{i} + 52\,\vec{j})$ km/h, llega al punto (35; 17) km en 3 horas. Determinar:

a) La posición que tenía la partícula en t = 1 hora.
b) El desplazamiento realizado desde t = 1 h hasta t = 3 h.
c) La distancia recorrida en el intervalo anterior.

a) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(\Delta t)$

$\vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{v}\Delta t$

$\vec{r}_0 = (35\,\vec{i} + 17\vec{j})\text{km} - (65\,\vec{i} + 52\vec{j})\text{km/h}.2\text{h}$

$\vec{r}_0 = (35\,\vec{i} + 17\vec{j})\text{km} - (130\,\vec{i} + 104\,\vec{j})\text{km}$

$\vec{r}_0 = (-95\,\vec{i} - 87\vec{j})$ km

b) $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$

$\Delta\vec{r} = (35\vec{i} + 17\vec{j})$ km $- (-95\vec{i} - 87\,\vec{j})$ km

$\Delta\vec{r} = (130\,\vec{i} + 104\vec{j})$ km

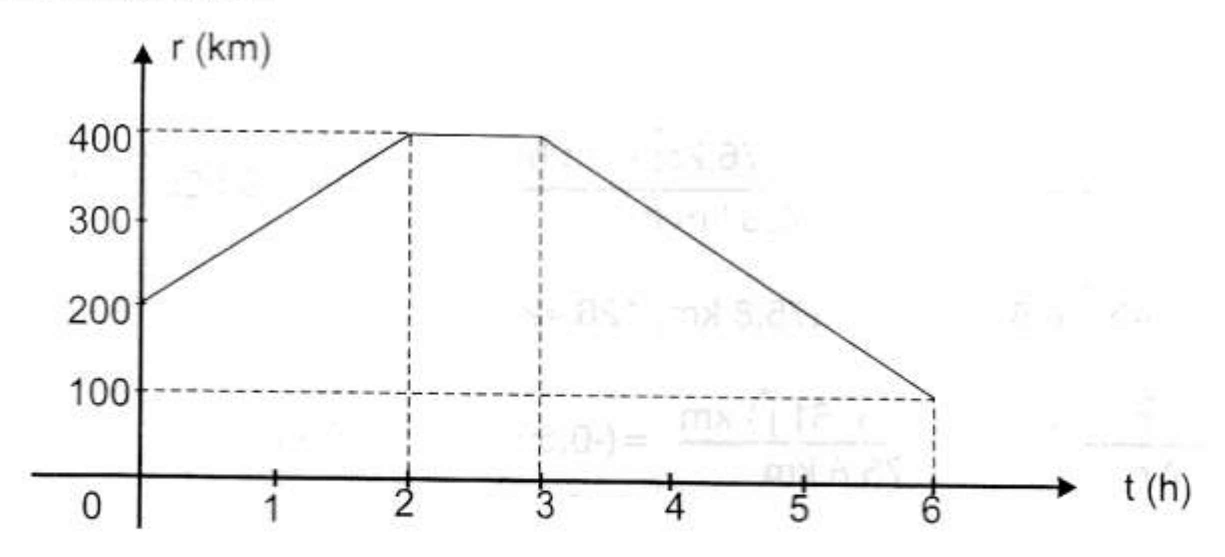
c) $\Delta\vec{r} = (166{,}48 \text{ km}; 38{,}66°)$

$\Delta r = 166{,}48$ km

3. La gráfica representa la posición de una partícula en función del tiempo. Si la trayectoria es rectilínea, determinar:

a) La posición inicial.
b) La rapidez en el viaje de ida.

c) En qué posición y cuánto tiempo permaneció en reposo.
d) La rapidez en el viaje de regreso.
e) La posición final.



a) A 200 km del origen.

b) $v_1 = \dfrac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{400\text{km} - 200\text{ km}}{2\text{h} - 0\text{h}} = \dfrac{200\text{ km}}{2\text{h}} = 100\text{km/h}$

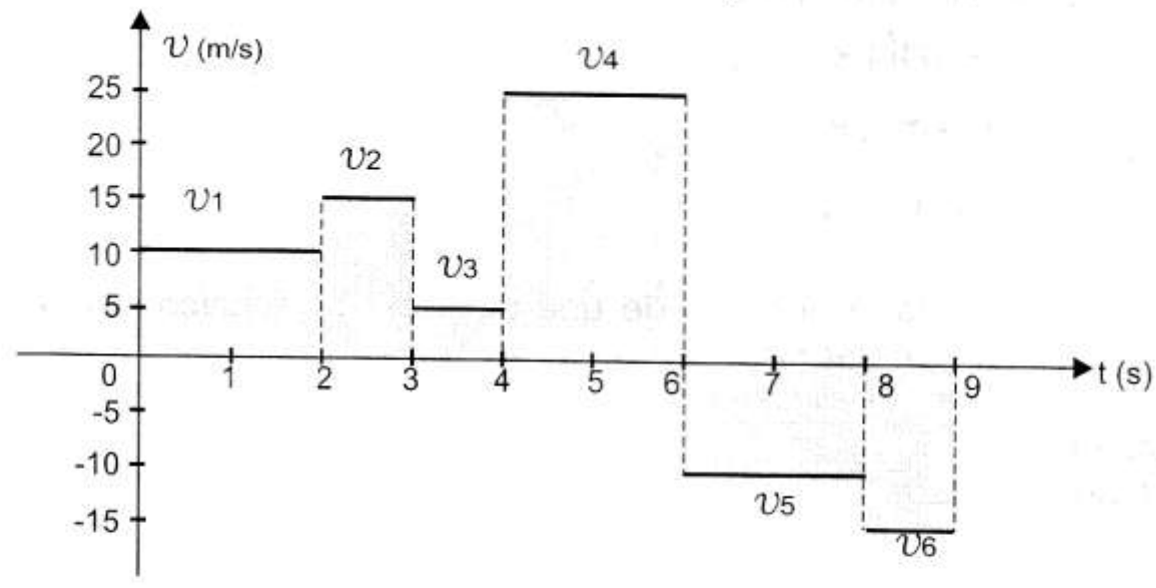
c) La partícula permaneció en reposo durante 1 hora en el kilómetro 400, porque su curva es paralela al eje del tiempo.

d) $v_3 = \dfrac{r_3 - r_2}{t_3 - t_2} = \dfrac{100\text{km} - 400\text{ km}}{6\text{h} - 3\text{h}} = \dfrac{-300\text{ km}}{3\text{h}} = -100\text{km/h}$

e) A 100 km del origen.

4. La gráfica representa la velocidad de una partícula en función del tiempo. Si la trayectoria es rectilínea, determinar:

a) La distancia que recorrió a la ida.
b) La distancia que recorrió al regreso.
c) El módulo del desplazamiento.
d) La distancia total recorrida.



a) $\Delta r_1 = v_1.\Delta t_1$ $\quad$ $\Delta r_2 = v_2.\Delta t_2$ $\quad$ $\Delta r_3 = v_3.\Delta t_3$ $\quad$ $\Delta r_4 = v_4.\Delta t_4$

$\Delta r_1 = 10\ m/s\ .\ 2s$ $\quad$ $\Delta r_2 = 15\ m/s\ .\ 1s$ $\quad$ $\Delta r_3 = 5\ m/s\ .\ 1s$ $\quad$ $\Delta r_4 = 25\ m/s\ .\ 2s$

$\Delta r_1 = 20\ m$ $\quad$ $\Delta r_2 = 15\ m$ $\quad$ $\Delta r_3 = 5\ m$ $\quad$ $\Delta r_4 = 50\ m$

distancia a la ida=90 m

b) $\Delta r_5 = v_5.\Delta t_5$ $\quad$ $\Delta r_6 = v_6.\Delta t_6$

$\Delta r_5 = -10\ m/s\ .\ 2s$ $\quad$ $\Delta r_6 = -15\ m/s\ .\ 1s$

$\Delta r_5 = -\ 20\ m$ $\quad$ $\Delta r_6 = -\ 15\ m$

distancia al regreso=35m

c) $\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3 + \Delta r_4 + \Delta r_5 + \Delta r_6$

$\Delta r = 20\ m + 15m + 5m + 50m - 20m - 15m$

$\Delta r = 55\ m$

d) $d = \Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3 + \Delta r_4 + \Delta r_5 + \Delta r_6$

$d = 20\ m + 15m + 5m + 50m + 20m + 15m$

$d = 125\ m$

5. Desde un mismo punto parten dos móviles con una rapidez constante de 72 km/h y 14 m/s respectivamente. Si el segundo sale 15 minutos antes que el primero, determinar analítica y gráficamente la distancia que los separda las 4 horas de haber salido el primero.

a) Si llevan la misma dirección y sentido.
b) Si llevan la misma dirección, pero sentido contrario.

a) Solución analítica:

$v_1 = 72\ km/h$ $\quad$ $v_2 = 14\ m/s = 50,4\ km/h$

$\Delta t_1 = 4h$ $\quad$ $\Delta t_2 = 4h + 0,25\ h = 4,25\ h$

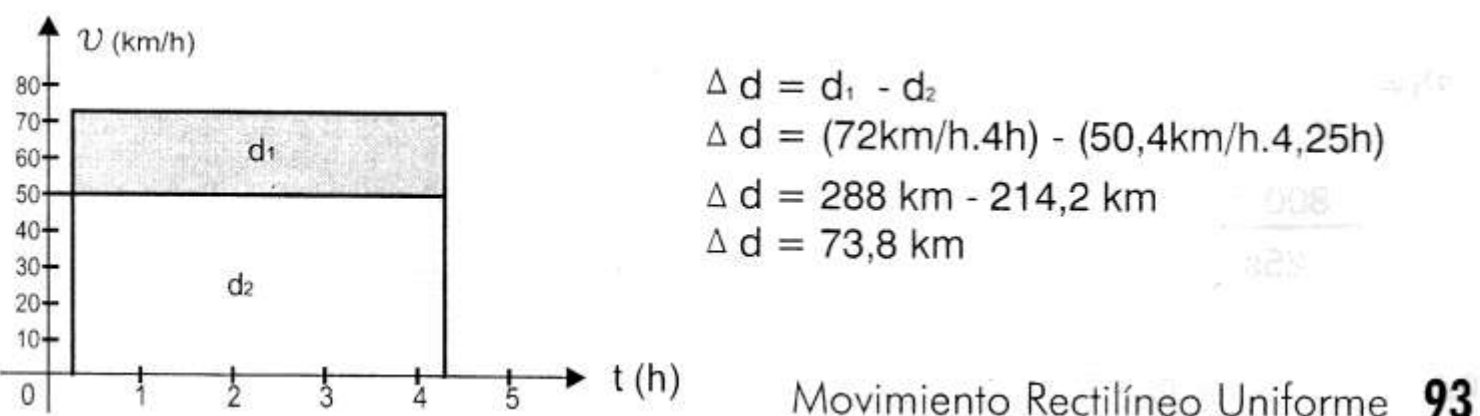
Hallamos la distancla recorrida por cada móvil y restamos:

$d_1 = v_1 \Delta.t_1$ $\quad$ $d_2 = v_2 \Delta t_2$ $\quad$ $\Delta d = d_1 - d_2$

$d_1 = 72\ km/h\ .\ 4h$ $\quad$ $d_2 = 50,4\ km/h.\ 4,25\ h$ $\quad$ $\Delta d = 288\ km - 214,2\ km$

$d_1 = 288km$ $\quad$ $d_2 = 214,2\ km$ $\quad$ $\Delta d = 73,8\ km$

Solución gráfica:



$\Delta d = d_1 - d_2$

$\Delta d = (72km/h.4h) - (50,4km/h.4,25h)$

$\Delta d = 288\ km - 214,2\ km$

$\Delta d = 73,8\ km$

b) d_2 v_2 v_1 d_1

Hallamos la distancia recorrida para cada móvil y sumamos:

Solución analítica:

$d_1 = v_1 . \Delta t_1$

$d_1 = 72$ km/h. 4 h

$d_1 = 288$ km

$d_2 = v_2 . \Delta t_2$

$d_2 = 50,4$ km/h. 4,25 h

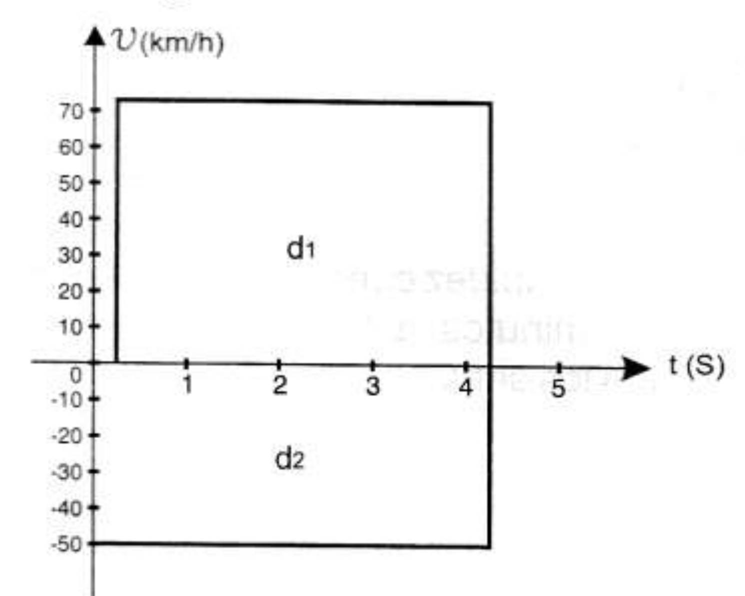
$d_2 = 214,2$ km

$d = d_1 + d_2$

$d = 288$ km + 214,2 km

$d = 502,2$ km

Solución gráfica:



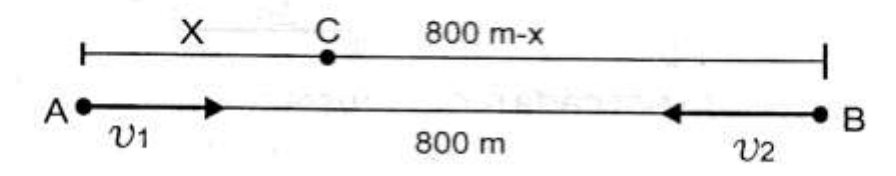
$\Delta d = d_1 + d_2$

$\Delta d = (72 \text{ km/h}.4\text{h}) + (50,4 \text{ km/h}.4,25 \text{ h})$

$\Delta d = 288\text{km} + 214,2\text{km}$

$\Delta d = 502,2$ km

6. Dos puntos A y B están separados por una distancia de 800 m. Desde A parte un móvil que tarda 25 segundos en llegar a B. Simultáneamente y desde B parte otro móvil que tarda 20 segundos en llegar a A. Si las trayectorias son rectilíneas, hallar analítica y gráficamente dónde y cuándo se encuentran.



Solución analítica:

Calculamos las velocidades:

$d = v_1 . \Delta t_1$

$$v_1 = \frac{d}{\Delta t_1}$$

$$v_1 = \frac{800 \text{ m}}{25\text{s}} = 32 \text{ m/s}$$

$d = v_2 \Delta t_2$

$$v_2 = \frac{d}{\Delta t_2}$$

$$v_2 = \frac{800 \text{ m}}{20\text{s}} = 40 \text{ m/s}$$

Se encontrarán en un punto C situado entre A y B. El móvil uno recorre **x**, mientras que el móvil dos recorre 800m - x:

móvil uno:

$x = v_1.\Delta t$ (1)

móvil dos:

$800m - x = v_2.\Delta t$ (2)

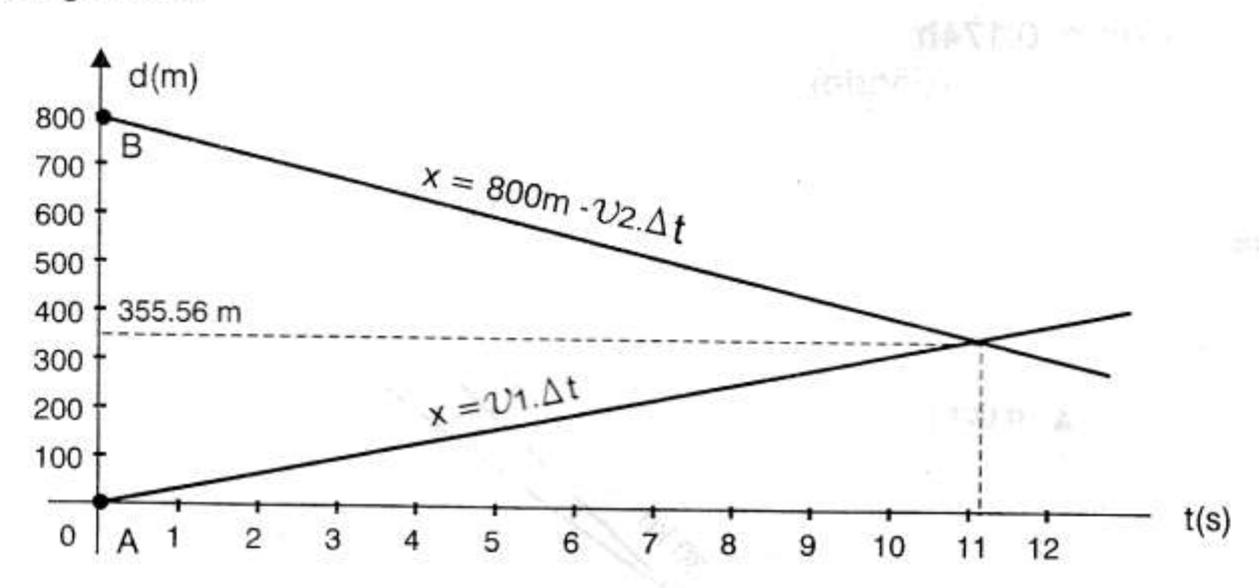
Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$x = 800\ m - v_2.\Delta t \quad (2)$$
$$x = x$$
$$v_1.\Delta t = 800\ m - v_2.\Delta t$$
$$v_1.\Delta t + v_2.\Delta t = 800\ m$$
$$32\ m/s.\Delta t + 40\ m/s.\Delta t = 800\ m$$
$$72\ m/s.\Delta t = 800\ m$$
$$\Delta t = \frac{800\ m}{72\ m/s} = 11{,}11\ s\ (\text{cuándo})$$

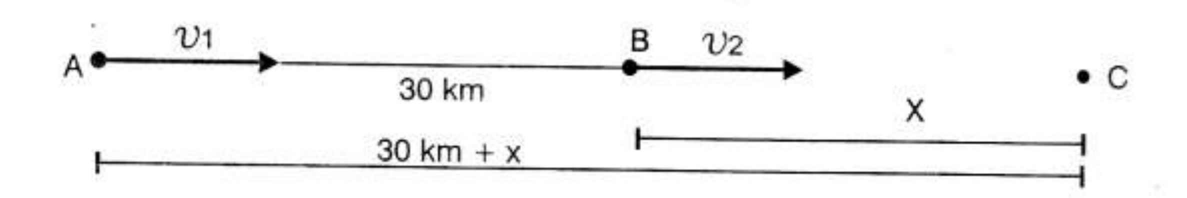
(1) $x = v_1.\Delta t$
$x = 32\ m/s\ .11{,}11\ s$
$x = 355{,}56m$ (dónde)

Se encuentran en un punto situado a 355,56 m de A y a los 11,11 s de haber partido.

Solución gráfica:



7. Dos puntos A y B están separados 30 km. Desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 25 km/h. Una hora después y desde B parte otro móvil con el mismo sentido de A y con una velocidad constante de 18 km/h. Determinar analítica y gráficamente dónde y cuándo se encuentran.



Solución analítica:

Como llevan un mismo sentido, se encuentran en un punto C a x distancia de B y (30 km + x) de A. A sale una hora antes y estará moviéndose (Δt + 1 h) Y B estará moviéndose Δt.

móvil A:

$$30\text{ km} + x = v_1(\Delta t + 1\text{h}) \qquad (1)$$

móvil B:

$$x = v_2 . \Delta t \qquad (2)$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$(1) \quad x = v_1(\Delta t + 1\text{h}) - 30\text{ km}$$

$$x = x$$

$$v_1(\Delta t + 1\text{h}) - 30\text{km} = v_2 . \Delta t$$

$$25\text{km/h}\Delta t + 25\text{km/h}.1\text{h} - 30\text{ km} = 18\text{ km/h}.\ \Delta t$$

$$25\text{km/h}.\Delta t - 18\text{km/h}.1\text{h} = 30\text{ km} - 25\text{ km}$$

$$7\text{km/h}.\ \Delta t = 5\text{km}$$

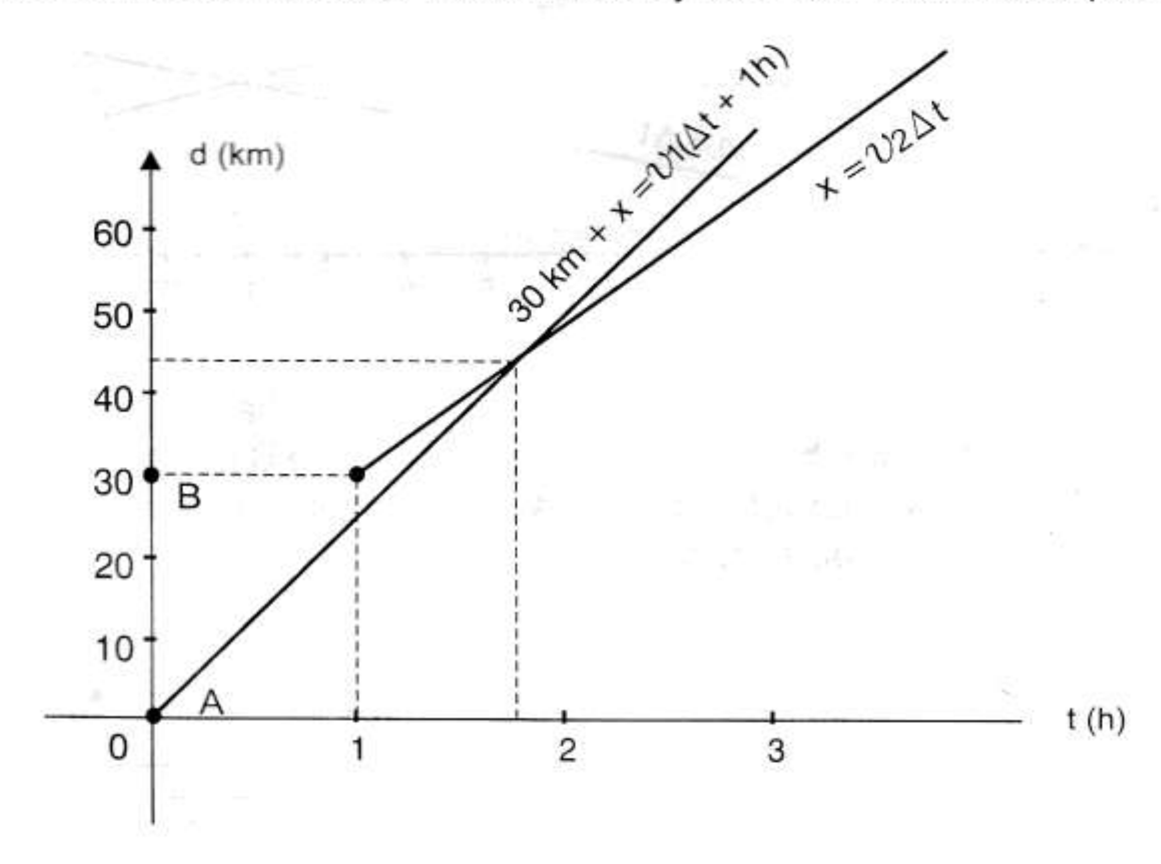
$$\Delta t = \frac{5\text{km}}{7\text{km/h}} = 0{,}714\text{ h (cuándo)}$$

(2) $x = v_2 .\ \Delta t$

$x = 18\text{ km/h } .0{,}174\text{h}$

$x = 12{,}85\text{ km}$ (dónde)

Se encuentran en punto situado a 12,85 km de B y a las 1,714 h de haber partido A.



EJERCICIO N°7

1. Si un vehículo se mueve de la ciudad A(-35, 50)km a la ciudad B(-25, -45)km en línea recta y con rapidez constante en 2 horas; determinar:

a) El desplazamiento realizado.
b) La velocidad media.
c) El desplazamiento durante los primeros 40 minutos de viaje.

2. Dos autos A,B se mueven por carreteras rectas horizontales con velocidades constantes de modo que al instante t=0 sus posiciones son $(-40\vec{i}+20\vec{j})$ y $(15\vec{i}-30\vec{j})$km y al instante t=10s sus posiciones son $(-20\vec{i})$ y $(-10\vec{j})$km respectivamente; determinar:

a) El desplazamiento de cada vehículo durante ese intervalo
b) La velocidad media de cada vehículo.
c) La velocidad de A respecto a B.

3. Un tren cuya velocidad es $60\vec{i}$ km/h, pasa por un túnel recto de 400m de largo y desde que penetra la máquina hasta que sale el último vagón demora 30s; determinar:

a) El desplazamiento del tren en 30, 60 y 90 (s).
b) La longitud del tren.

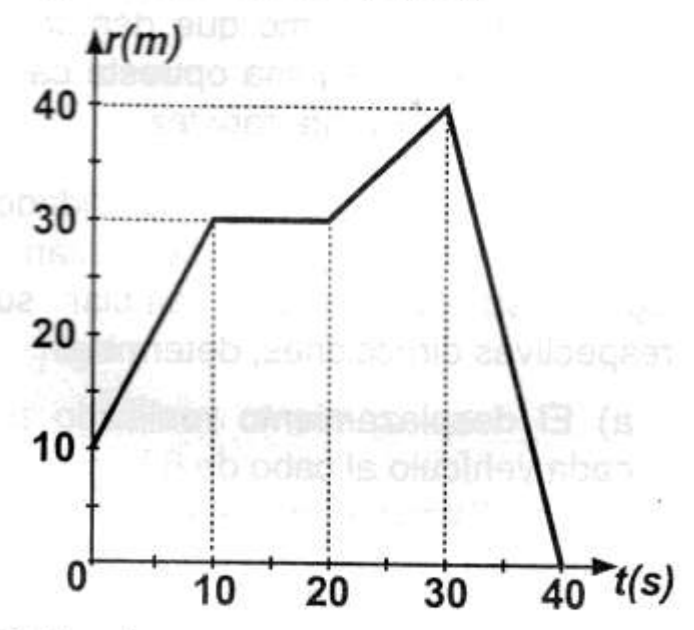
4. Una partícula parte del punto (25,-20)m y moviéndose rectilíneamente llega al punto (-6,-30)m con una rapidez constante de 40km/h; determinar:

a) La velocidad empleada
b) El tiempo empleado
c) El punto al que llegaría si continúa moviéndose por 10s más.

5. Un deportista se desplaza $1000\vec{i}$ km por una ruta rectilínea, parte en moto y parte en bicicleta, sabiendo que las velocidades han sido $120\vec{i}$ km/h en moto y $40\vec{i}$ km/h en bicicleta y que el tiempo empleado ha sido 10 horas; determinar:

a) La velocidad media durante las 10 horas.
b) El desplazamiento en moto.
c) El tiempo que recorrió en bicicleta.

6. Una partícula se mueve de acuerdo al gráfico posición - tiempo:



Determinar:

a) La posición inicial.
b) La rapidez en cada tramo del viaje.
c) El tiempo que permaneció en reposo.
d) La posición cuando t=35(s).
e) Cuándo la partícula está a 20m del origen y cuándo está en el origen.

EJERCICIO N°7

7. Una persona parte de la esquina (0,0) de una cancha de fútbol que mide 100m x 60m y camina primero por detrás del arco Sur, lado que se hace coincidir con el eje X (+), hacia el Este y continúa su recorrido bordeando todo su perímetro a una rapidez constante igual a 2m/s; determinar:

a) La velocidad en cada tramo
b) El tiempo que demora en recorrer cada lado
c) El desplazamiento y la distancia recorrida cuando ha llegado a la esquina opuesta a la que partió.
d) El tiempo mínimo que demoraría en llegar a la esquina opuesta caminando a esa misma rapidez.

8. Dos vehículos cuyas velocidades son $10\vec{i}$ km/h y $12\vec{j}$ km/h se cruzan y siguen su camino sin cambiar sus respectivas direcciones; determinar:

a) El desplazamiento realizado por cada vehículo al cabo de 6 horas.
b) La distancia que los separa al cabo de 6 horas.
c) En qué tiempo desde que se cruzan estarán a 100km de distancia.

9. Dos puntos A y B están separados 80m. Desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 3m/s. Cinco segundos después y desde B parte otro móvil con la misma dirección y sentido que el primero y con una rapidez constante de 2m/s; determinar:

a) Analítica y gráficamente cuándo y dónde se encuentran.
b) En qué tiempo la distancia que los separa es nuevamente 80m.

10. Dos autos A y B parten simultáneamente, A con una velocidad de $53\vec{i}$ km/h y B con una velocidad de $32\vec{i}$ km/h, si los autos se encuentran al cabo de 2,4 horas; determinar:

a) La distancia que los separaba inicialmente.
b) El tiempo en que A llega al punto donde partió B.
c) El tiempo que demoraría B en llegar al punto de partida de A, suponiendo que en el instante en que se encuentran B invierte el sentido.

11. Dos automóviles viajan en la misma ruta rectilínea y estan a 134km de distancia, si el más rápido viaja a 63km/h; determinar:

a) La rapidez del más lento, si los dos viajan en el mismo sentido y se encuentrana al cabo de 3 horas.
b) Dónde y cuándo se encuentran si los dos viajan en sentido contrario y con la rapidez dada para el más rápido y la obtenida en el punto anterior para el otro.

12. Dos puntos A y B están en la misma horizontal, desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 2m/s y 5 minutos después parte desde B hacia A otro móvil a 10km/h, si A y B distan 3km; determinar:

a) Analíticamente, dónde y cuándo se encuentran.
b) Gráficamente, dónde y cuándo se encuentran.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV). Es el de un móvil cuya aceleración ($\vec{a}$) permanece constante en módulo y dirección:

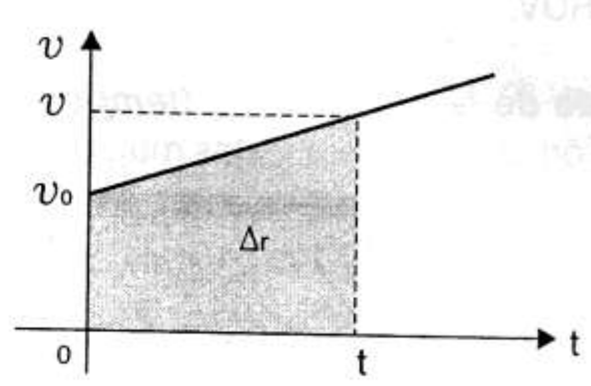
$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = cte \implies \Delta\vec{v} = \vec{a}.\Delta t$$

Si se hace coincidir el eje **x** con la dirección del movimiento, se tendrá:

$v_x = v_{ox} + a_x . \Delta t$ o simplemente:

$v = v_o + a.t$ **(2.2.3)**

Si representamos gráficamente la expresión anterior, tendremos el diagrama rapidez vs. tiempo , el cual nos permite calcular, como en el MRU, el valor de la componente del desplazamiento, determinando el área comprendida entre la curva y el eje de los tiempos:



Δr = área del trapecio

Δr = semisuma de sus bases por la altura

$\Delta r = \left[\frac{v_o + v}{2}\right] t$: pero $v = v_o + at$

$\Delta r = \left[\frac{v_o + v_o + at}{2}\right] t = \frac{2v_o t + at^2}{2}$

$\Delta r = v_o t + \frac{1}{2} at^2$ **(2.2.4)**

$r = r_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2$ **(2.2.5)**

Si se despeja el tiempo (t) en la ecuación **(2.2.3)** y se reemplaza en la ecuación **(2.2.4)**, se obtiene:

$\Delta r = v_o t + \frac{1}{2} at^2$

$$\Delta r = v_o \frac{v - v_o}{a} + \frac{1}{2} a \left[\frac{v - v_o}{a} \right]^2$$

$$\Delta r = \frac{v_o . v - v_o^2}{a} + \frac{v^2 - 2 v v_o + v_o^2}{2a}$$

$$2a.\Delta r = 2 v_o . v - 2 v_o^2 + v^2 - 2 v v_o + v_o^2$$

$$2a.\Delta r = v^2 - v_o^2$$

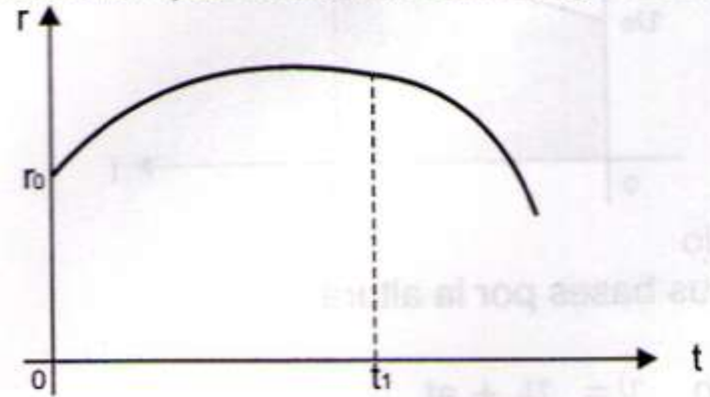
$$v^2 = v_o^2 + 2a\Delta r \qquad \textbf{(2.2.6)}$$

La velocidad media en función de las velocidades inicial y final en este movimiento es:

$$v m = \frac{v_o + v}{2} \qquad \textbf{(2.2.7)}$$

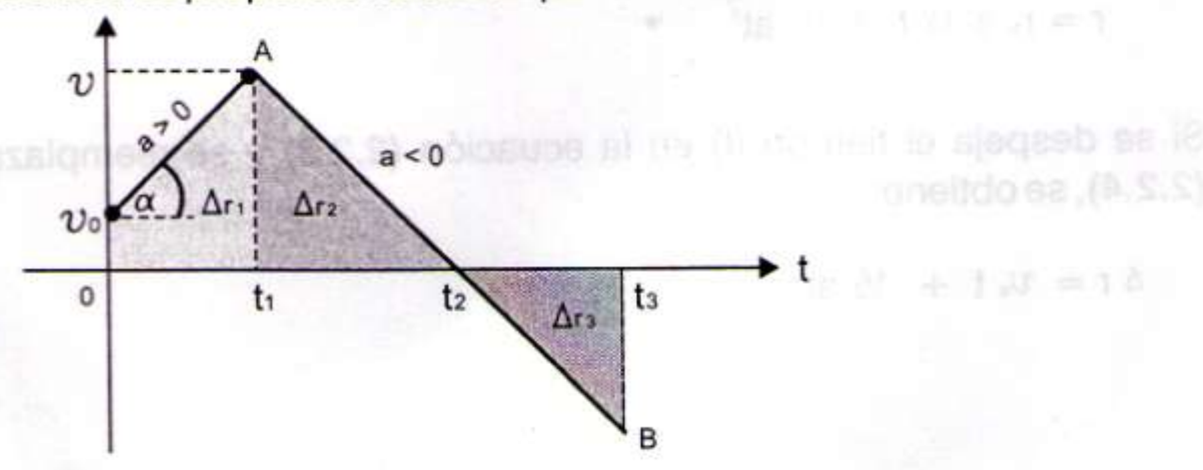
Las ecuaciones **(2.2.3)**, **(2.2.4)**, **(2.2.6)** y **(2.2.7)** son las relaciones fundamentales que permiten analizar el MRUV.

Gráfico de la componente de la posición vs. tiempo (r x t). En un MRUV es una parábola, porque la ecuación que relaciona estas magnitudes es: $r = r_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$



A partir de este gráfico se puede determinar la rapidez, calculando la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto considerado y el eje de los tiempos.

Gráfico de la compollente de la velocidad vs. tiempo (v x t). En un MRUV es una recta,porque la velocidad es proporcional al tiempo: $v = v_o + at$



En este gráfico la aceleración está representada por la pendiente de la recta:

$$m_1 = \text{tag } \alpha = \frac{v - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a = \text{cte.}$$

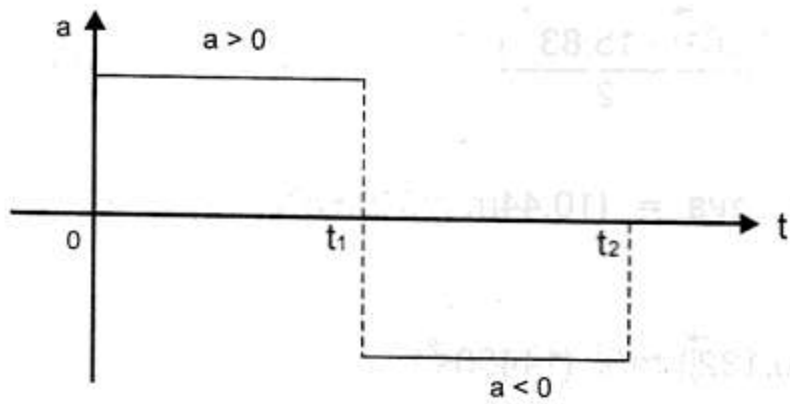
En el MRUV la rapidez varía y según ésta aumente o disminuya, el movimiento es acelerado o retardado, respectivamente.

En un gráfico $v$xt, podemos calcular el módulo del desplazamiento (Δr) realizado por el móvil, determinando el área comprendida entre la curva y el eje de los tiempos:

Δr = área del trapecio ($0t_1 A v_0$) + área del tríangulo ($t_1 t_2 A$) + área del triángulo ($t_2 B t_3$)

$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3$

Gráfico de la componente de la aceleración vs. tiempo (a x t). En el MRUV la aceleración es constante y su representación gráfica es una recta paralela al eje de los tiempos:



Vectorialmente, si la velocidad y la aceleración tienen la misma dirección y sentido, el movimiento es acelerado ($\vec{u}_v = \vec{u}_a$); si sus sentidos son opuestos, el movimiento es retardado o desacelerado ($\vec{u}_v = -\vec{u}_a$).

En las ecuaciones o en los gráficos se identifica si el movimiento es acelerado, cuando los signos de la velocidad y la aceleración son iguales (los dos positivos o los dos negativos). Si los signos son contrarios, el movimiento es retardado.

Un caso imponante de los MRUV lo constituye la CAíDA LIBRE, que es un movimiento vertical de un cuerpo dirigido hacia abajo, cuya aceleración, causada por la atracción de la Tierra, permanece constante. Dicha aceleración se llama ***aceleración de la gravedad*** y su valor es de aproximadamente 9.8 m/s^2 ó 980 cm/s^2

Vectorialmente: $\vec{g} = (-9.8\vec{i})\ m/s^2 = (-980\vec{j})\ cm/s^2$

EJEMPLOS

1. Un móvil arranca y después de 2 min de moverse por una trayectoria recta, adquiere una velocidad de $(49\vec{i} - 57\vec{j})$ km/h. Determinar:

a) La aceleración producida.
b) La velocidad media.
c) La rapidez media.
d) El desplazamiento realizado.
e) La distancia recorrida.

Datos:

$\vec{v}_o = 0$
$\Delta t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$
$\vec{v} = (49\vec{i} - 57\vec{j}) \text{ km/h} = (13{,}61\vec{i} - 15{,}83\vec{j}) \text{ m/s}$

a) $\vec{v} = \vec{v}_o^{\,0} + \vec{a}t$

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}}{t} = \frac{(13{,}61\vec{i} - 15{,}83\vec{j}) \text{ m/s}}{120 \text{ s}} = (0{,}113\vec{i} - 0{,}132\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

b) $$\vec{v}_m = \frac{\vec{v} + \vec{v}_o^{\,0}}{2} = \frac{(13{,}61\vec{i} - 15{,}83\vec{j}) \text{ m/s}}{2} = (6{,}8\vec{i} - 7{,}92\vec{j}) \text{ m/s}$$

c) $\vec{v}_m = (6{,}8\vec{i} - 7{,}92\vec{j}) \text{ m/s} = (10{,}44 \text{m/s}; 310{,}65°) \Rightarrow v_m = 10{,}44 \text{m/s}$

d) $\Delta\vec{r} = \vec{v}_o t^{\,0} + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$\Delta\vec{r} = \frac{1}{2}(0{,}113\vec{i} - 0{,}132\vec{j}) \text{ m/s}^2 \, (14400 \text{s}^2)$

$\Delta\vec{r} = (813{,}6\vec{i} - 950{,}4\vec{j}) \text{ m}$

e) $\Delta\vec{r} = (813{,}6\vec{i} - 950{,}4\vec{j}) \text{ m} = (1251{,}08 \text{ m}; 310{,}65°)$

$\Delta r = 1251{,}08 \text{ m}$

2. Cuando la velocidad de un automóvil animado de movimiento rectilíneo es $(11\vec{i} + 16\vec{j})$ m/s, se le comunica una aceleración de módulo 6 m/s^2 en sentido opuesto al de la velocidad durante 10 s. Determinar:

a) El desplazamiento realizado.
b) La distancia recorrida.
c) La velocidad media
d) La velocidad final del automóvil.

Datos:

$\vec{v}_o = (-11\vec{i} + 16\vec{j}) \text{m/s} = (19{,}42 \text{ m/s}; 124{,}51°)$
$a = -6 \text{ m/s}^2$
$\vec{a} = (-6 \text{ m/s}^2 ; 124{,}51°) = (3{,}4\vec{i} - 4{,}94\vec{j}) \text{ m/s}^2$
$\Delta t = 10 \text{ s}$

a) $\vec{\Delta r} = \vec{v_o}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

$\vec{\Delta r} = (-11\vec{i} + 16\vec{j})$ m/s (10 s) $+\frac{1}{2}(3,4\vec{i} - 4,94\vec{j})$ m/s^2 (100)s^2

$\vec{\Delta r} = (-110\vec{i} + 160\vec{j})$m $+ (170\vec{i} - 247\vec{j})$m

$\vec{\Delta r} = (60\vec{i} - 87\vec{j})$ m

b) Calculamos para qué tiempo $v = 0$

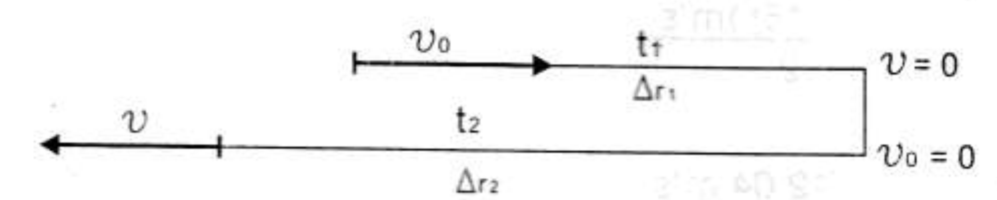
$\vec{v} = \vec{v_o} + \vec{a}t$

$$t_1 = \frac{-v_o}{a} = \frac{-19,42 \text{ m/s}}{-6 \text{ m/s}^2} = 3,24 \text{ s}$$

t_1 = tiempo de ida con movimiento retardado

t_2 = 10 s - 3,24 s

t_2 = 6,76 s (tiempo de regreso con movimiento acelerado)



$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2$

$\Delta r = (v_o t + \frac{1}{2}at^2) + (v_o t + \frac{1}{2}at^2)$

$\Delta r = [(19,42 \text{ m/s})(3,24 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-6\text{m/s}^2)(10,5 \text{ s}^2)] + [\frac{1}{2}(6\text{m/s}^2)(45,7 \text{ s}^2)]$

$\Delta r = [62,92 \text{ m} - 31,5 \text{ m}] + [137,10\text{m}]$

$\Delta r = 168,52$ m

c) $$\vec{v_m} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{(\vec{60} i + \vec{87} j) \text{ m}}{10\text{s}} = (6\vec{i} + ,8,7\vec{j})\text{m/s}$$

d) $\vec{v} = \vec{v_o} + \vec{a}t$

$\vec{v} = (-11\vec{i} + 16\vec{j})$m/s $+ (3,4\vec{i} - 4,94\vec{j})$ m/s^2(10s)

$\vec{v} = (-11\vec{i} + 16\vec{j})$m/s $+ (3,4\vec{i} - 4,94\vec{j})$ m/s

$\vec{v} = (23\vec{i} + 33,4\vec{j})$m/s

3. Un móvil parte del reposo y cuando ha recorrido 120 m con movimiento rectilíneo, tiene una velocidad de (-18 i - 16 j)m/s. Determinar:

a) Su aceleración.
b) La velocidad media.
c) La rapidez media.
d) El tiempo transcurrido.
e) El desplazamiento realizado.

Datos:

$\upsilon_o = 0$
$\Delta r = 120$ m
$\vec{\upsilon} = (-18\vec{i} - 16\vec{j})$m/s = (24,08m/s; 221,63°)

a) $\upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2a\Delta r$

$$a = \frac{\upsilon^2}{2\Delta r} = \frac{(24{,}08 \text{ m/s})^2}{2(120\text{m})} = 2{,}42 \text{ m/s}$$

$\vec{a} = (2{,}42$ m/s^2; 221,63°)
$\vec{a} = (-1{,}8\vec{i} - 1{,}61\vec{j})$m/s^2

b) $$\vec{\upsilon}_m = \frac{\vec{\upsilon}_o + \vec{\upsilon}}{2} = \frac{(-18\vec{i} - 16\vec{j})\text{m/s}}{2} = (-9\vec{i} - 8\vec{j})\text{m/s}$$

c) $\vec{\upsilon}_m = (-9\vec{i} - 8\vec{j})$m/s = (12,04 m/s ; 221,63°) $\Longrightarrow$ $\upsilon_m = 12{,}04$ m/s

d) $$\upsilon_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} \Longrightarrow \Delta t = \frac{\Delta r}{\upsilon_m} = \frac{120 \text{ m}}{12{,}04 \text{ m/s}} = 9{,}97 \text{ s}$$

e) $\vec{\Delta r} = (120; 221{,}63°) = (-89{,}69\vec{i} - 79{,}72\vec{j})$m

4. En una carretera recta, un móvil parte del reposo con una aceleración de $(1{,}12\vec{i} - 1{,}656\vec{j})$m/s^2, que mantiene durante 30 s; después se mueve 2 minutos con velocidad constante y finalmente aplica los frenos con una desaceleración de $(-2{,}24\vec{i} + 3{,}312\vec{j})$m/s hasta que se detiene. Determinar:

a) El espacio total recorrido.
b) El desplazamiento total realizado.
c) El tiempo total empleado.

Datos:

$\upsilon_o = 0$
$\vec{a}_1 = (1{,}12\vec{i} - 1{,}656\vec{j})$ m/s^2 = (2 m/s; 304,07°)
$\Delta t_1 = 30$ s
$\Delta t_2 = 2$ min = 120 s
υ_2 = constante
$\vec{a}_3 = (-2{,}24\vec{i} + 3{,}312\vec{j})$ m/s^2 = (-4 m/s^2; 304,07°)
$\upsilon_3 = 0$

a) Dividimos todo el movimiento en tres intervalos:

I	II	III
$v_0 = 0$ $\vec{a}_1$ Δr_1	v_2 $v_2 = k$ Δr_2	v_2 $-\vec{a}_3$ Δr_3 $v_3 = 0$

Intervalo I (movimiento acelerado):

$\Delta r_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2$ (con $v_0 = 0$)
$\Delta r_1 = \frac{1}{2}(2 m/s^2)(900\ s^2)$
$\Delta r_1 = 900\ m$

$v_2 = v_0 + a_1 t$
$v_2 = (2 m/s^2) 30 s$
$v_2 = 60 m/s$

Intervalo II (movimiento uniforme):

$\Delta r_2 = v_2 . t_2 = (60 m/s)\ 120\ s \qquad = 7200\ m$

Intervalo III (movimiento retardado):

$v_3^2 = v_2^2 + 2a_3 \Delta r_3 \quad \Longrightarrow \quad \Delta r_3 = \frac{-v_2^2}{2a_3} = \frac{-(60\ m/s)^2}{2(-4 m/s^2)} = 450 m$ (con $v_3 = 0$)

$\Delta r = \Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3$
$\Delta r = 900m + 7200m + 450m$
$\Delta r = 8550m$

b) $\vec{\Delta r} = (8550m; 304{,}07°) = (4789{,}76\vec{i} - 7082{,}42\vec{j}) m$

c) $v_3 = v_2 + a_3 \Delta t_3 \quad \Longrightarrow \quad \Delta t_3 = \frac{-v_2}{a_3} = \frac{-60\ m/s}{-4 m/s^2} = 15\ s$ (con $v_3 = 0$)

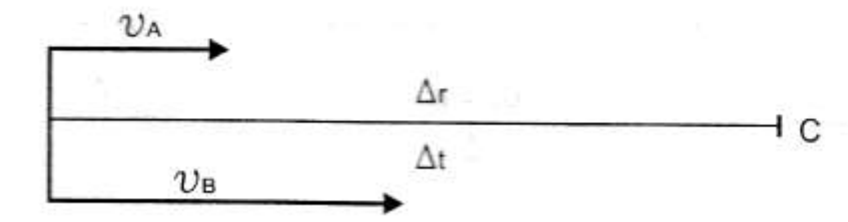
$t_T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$
$t_T = 30\ s + 120\ s + 15\ s$
$t_T = 165\ s$

5. Dos móviles, A y B, parten simultáneamente desde un mismo punto con movimiento rectilíneo y con la misma dirección y sentido. A parte con una rapidez de 5 m/s y una aceleración de $(0{,}2\vec{i} + 0{,}98\vec{j}) m/s^2$ y B con una rapidez de 10 m/s y una aceleración de $(0{,}04\vec{i} + 0{,}196\vec{j})\ m/s^2$. ¿Dónde y cuándo se encuentran?

Datos:

$v_A = 5\ m/s$
$\vec{a}_A = (0{,}2\vec{i} + 0{,}98\vec{j})\ m/s^2 = (1\ m/s^2\ ; 78{,}47°)$
$v_B = 10\ m/s$
$\vec{a}_B = (0{,}04\vec{i} + 0{,}196\vec{j}) m/s^2 = (0{,}2\ m/s^2; 78{,}47°)$

Los dos móviles recorren hasta el punto de encuentro C, Δr metros en t segundos:



$\Delta r_A = \Delta r_B$

$\upsilon_A t + \frac{1}{2} a_A t^2 = \upsilon_B t + \frac{1}{2} a_B t^2$ dividimos la igualdad por t:

$\upsilon_A + \frac{1}{2} a_A t = \upsilon_B + \frac{1}{2} a_B t$

$\frac{1}{2} a_A t - \frac{1}{2} a_B t = \upsilon_B - \upsilon_A$

$t(\frac{1}{2} a_A - \frac{1}{2} a_B) = \upsilon_B - \upsilon_A$

$$t = \frac{\upsilon_B - \upsilon_A}{\frac{1}{2} a_A - \frac{1}{2} a_B} = \frac{10 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s}}{0{,}5 \text{ m/s}^2 - 0{,}1 \text{ m/s}^2} = 12{,}5 \text{ s de haber salido.}$$

Calculamos Δr, reemplazando el valor de $t = 12{,}5$ s:

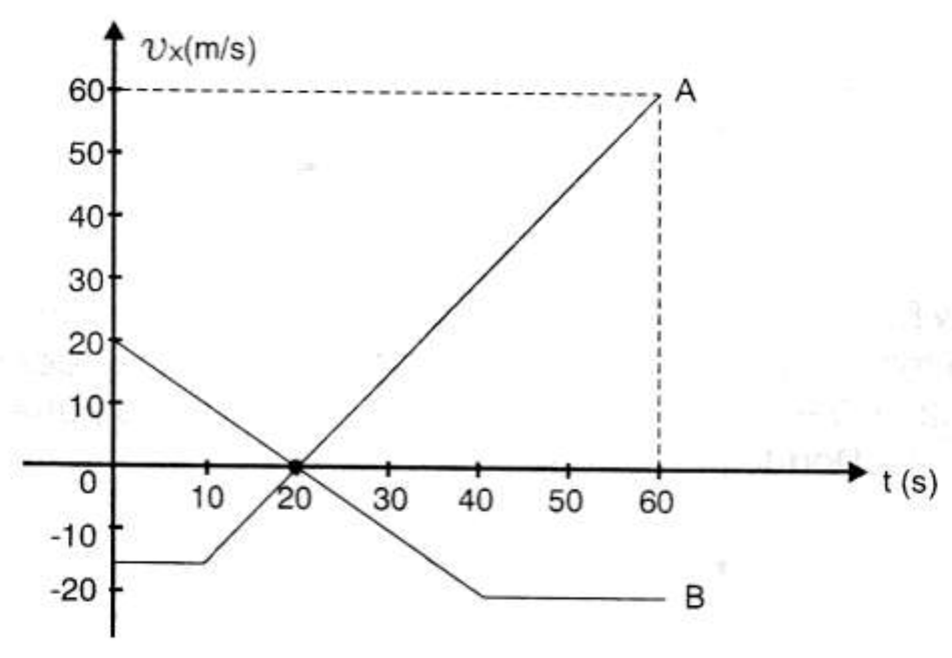
$\Delta r = \upsilon_A t + \frac{1}{2} a_A t^2$

$\Delta r = (5 \text{m/s})(12{,}5 \text{ s}) + \frac{1}{2}(1 \text{ m/s}^2)(156{,}25 \text{ s}^2)$

$\Delta r = 62{,}5 \text{ m} + 78{,}13 \text{ m}$

$\Delta r = 140{,}63$ m del punto de partida.

6. Dos partículas A y B se mueven de acuerdo con el siguiente gráfico υx - t a lo largo de una trayectoria rectilínea. Si las dos partículas parten del origen en t = 0, determinar:



a) El tipo de movimiento de la partícula en cada intervalo de tiempo.

b) La distancia entre las dos partículas después de 20 y 40 s de haberse iniciado el movimiento.

c) Dónde y cuándo se encontrarán. Solución analítica, solución gráfica.

d) El gráfico a_x - t de cada una de las partículas.

a) Partícula A:

$0(s) < t \leq 10(s)$
MRU porque la curva es paralela al eje del tiempo.
$a = 0$

$10(s) < t \leq 20(s)$
MRUV retardado porque la velocidad va disminuyendo en valor absoluto.

$a = \frac{15 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 1{,}5 \text{ m/s}^2$; la aceleración tiene signo contrario a la velocidad.

$20 (s) < t \leq 60 (s)$
MRUV acelerado porque la velocidad va aumentando en valor absoluto.

$a = \frac{60 \text{ m/s}}{40 \text{ s}} = 1{,}5 \text{ m/s}^2$; la aceleración tiene el mismo signo de la velocidad

Partícula B:

$0(s) < t \leq 20 (s)$
MRUV retardado porque la velocidad va disminuyendo en valor absoluto.

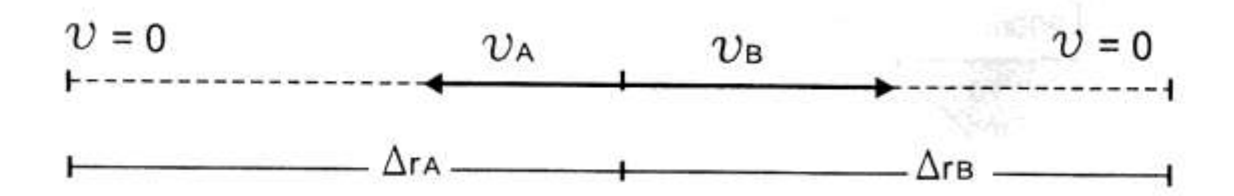
$a = \frac{-20 \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = -1 \text{ m/s}^2$; la aceleración tiene signo contrario a la velocidad.

$20 (s) < t \leq 40 (s)$
MRUV acelerado porque la velocidad va aumentando en valor absoluto.

$a = \frac{-20 \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = -1 \text{ m/s}^2$; la aceleración tiene el mismo signo de la velocidad.

$40 (s) < t \leq 60 (s)$
MRU porque la curva es paralela al eje del tiempo.
$a = 0$

b) Para t = 20 s



(A) Calculamos el área del trapecio:

$$\Delta r_A = \frac{20s + 10\,s}{2} \quad (-15\ m/s) \;=\; -225\ m$$

(B) Calculamos el área del triángulo:

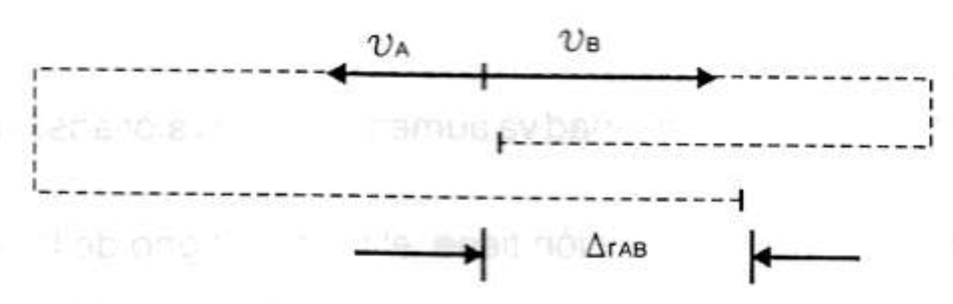
$\Delta r_B = ½(20\ s)\ (20m/s) = 200m$

$\Delta r_{AB} = \Delta r_A + \Delta r_B$

$\Delta r_{AB} = 225+200$

$\Delta r_{AB} = 425m$

Para t=40s



(A) Δr_A = -225 m + área del triángulo:

$\Delta r_A = -225\ m + ½\ (20\ s)\ (30\ m/s)$

$\Delta r_A = -225\ m + 300\ m$

$\Delta r_A = 75\ m$

(B) Δr_B = 200 m + área del triángulo

$\Delta r_B = 200\ m + ½\ (20\ s)\ (-20\ m/s)$

$\Delta r_B = 200\ m - 200\ m$

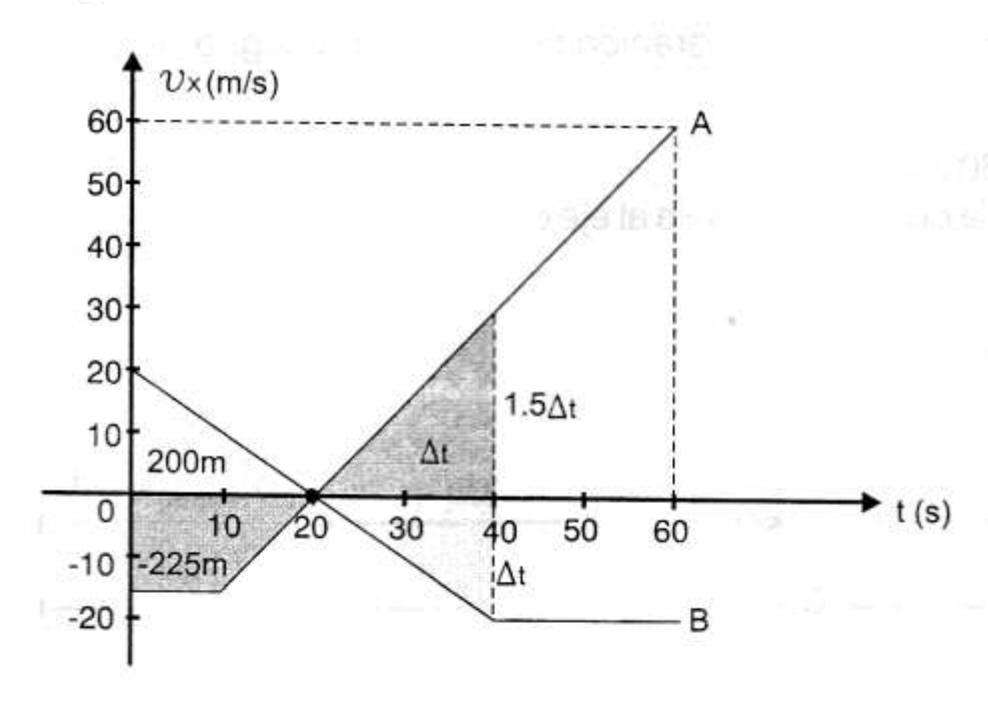
$\Delta r_B = 0$

$\Delta r_{AB} = \Delta r_A - \Delta r_B$

$\Delta r_{AB} = 75\ m - 0$

$\Delta r_{AB} = 75\ m$

c) **Solución analítica:** el punto de encuentro será Δt segundos después que comienzan a regresar.



Módulo del desplazamiento del móvil B = módulo del desplazamiento del móvil A

$$200 - \frac{1}{2}(\Delta t)(\Delta t) = -225 + \frac{1}{2}(\Delta t)(1{,}5\Delta t)$$

$$425 = 1{,}25\,\Delta t^2$$

$$\Delta t^2 = \frac{425}{1{,}25}$$

$\Delta t = 18{,}44\text{s}$

$t = 20\text{ s} + 18{,}44\text{ s}$

$t = 38{,}44$ s de haber partido

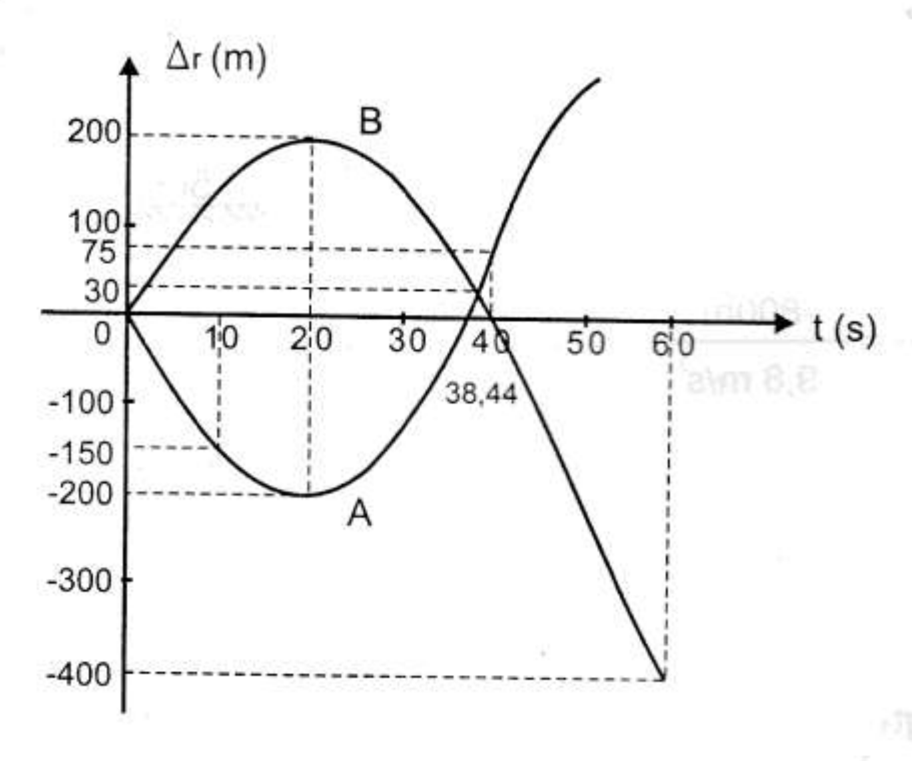
$\Delta r_B = 200 - \frac{1}{2}(\Delta t)^2$

$\Delta r_B = 200 - \frac{1}{2}(18{,}44)^2$

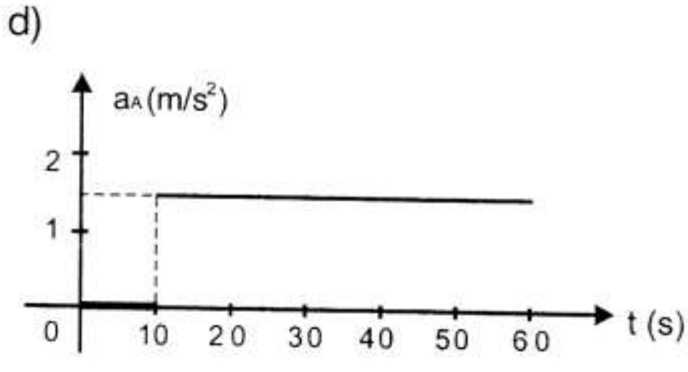
$\Delta r_B = 200 - 170$

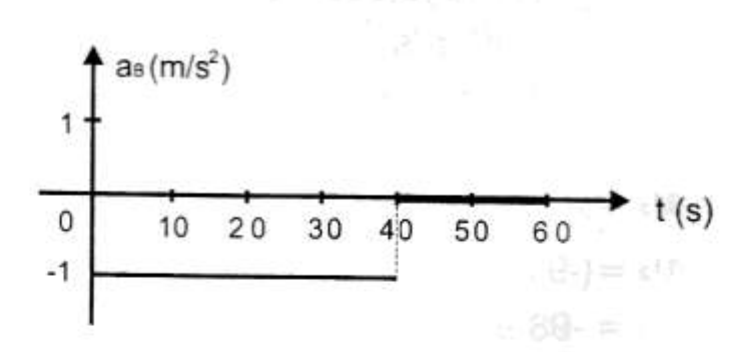
$\Delta r_B = 30$ (a la derecha del origen)

Solución gráfica:



d)

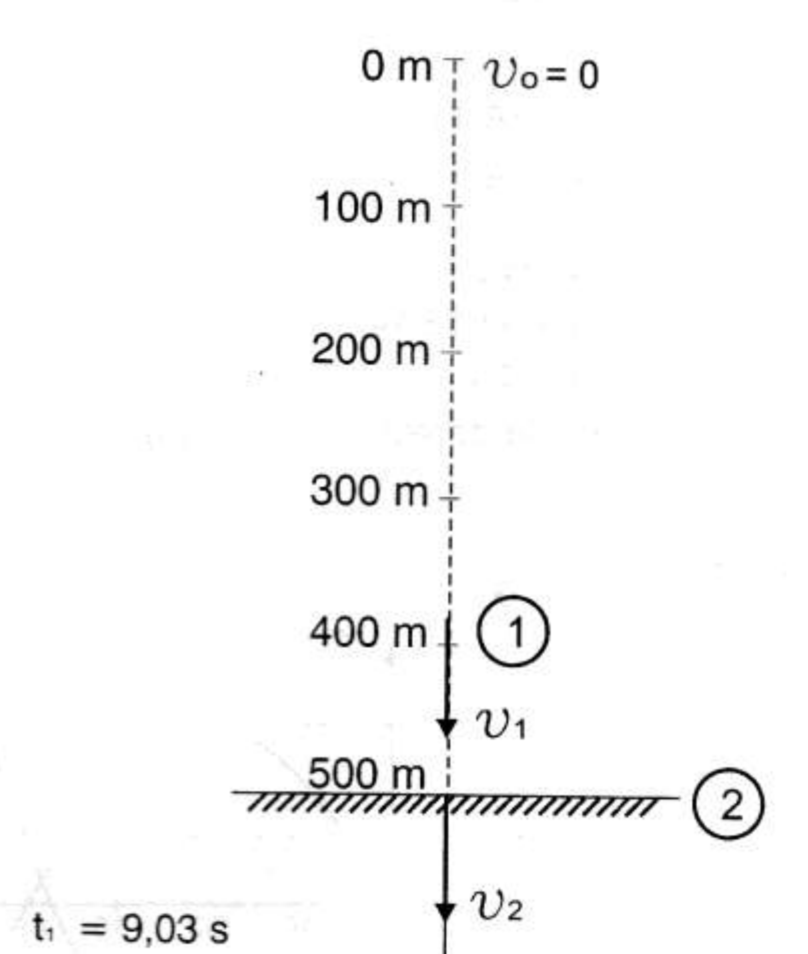




7. Desde una altura de 500 m se deja caer libremente un cuerpo . Determinar:

a) Cuánto tardará en recorrer los 100 m finales.
b) Con qué velocidad comenzó estos 100 m.
c) Con qué velocidad salió de estos 100 m.

Datos:



$v_o = 0$
$\Delta r = 500m$

a) $\Delta r_2 = \cancelto{0}{v_o}.t + \frac{1}{2} g t_2^2$

$$t_2^2 = \frac{2\Delta r_2}{g}$$

$$t_2^2 = \frac{-1000m}{-9,8\ m/s^2}$$

$$t_2 = 10,1\ s$$

$\Delta r_1 = \cancelto{0}{v_o}.t + \frac{1}{2} g t_1^2$

$$t_1^2 = \frac{2\Delta r_1}{g} = \frac{-800m}{-9,8\ m/s^2} \implies t_1 = 9,03\ s$$

$\Delta t = t_2 - t_1$
$\Delta t = 10,1\ s - 9,03\ s$
$\Delta t = 1,07\ s$

b) $v_1 = \cancelto{0}{v_o} + g t_1$
$v_1 = (-9,8 m/s^2) 9,03s$
$v_1 = -88,49\ m/s$
$v_1 = (-88,49\vec{j})\ m/s$

c) $v_2 = \cancelto{0}{v_o} + g t_2$
$v_2 = (-9,8 m/s^2) 10,1s$
$v_2 = -98,98\ m/s$
$\vec{v}_2 = (-98,98\vec{j})\ m/s$

8. Un cuerpo es lanzado con una velocidad de $(20\vec{j})$ m/s. Determinar:

a) La velocidad que lleva a los 1,5 s y 3 s.
b) La altura que tendrá en los tiempos anteriores.
c) La máxima altura alcanzada.
d) El tiempo del vuelo.
e) La velocidad con que regresa al suelo.

Datos:

$\vec{v}_o = (20\ j)$m/s

$t_1 = 1,5$ s
$t_2 = 3$s

a) $\vec{v}_1 = \vec{v}_o + \vec{g}t_1$

$\vec{v}_1 = (20\vec{j})$ m/s + $(-9,8\vec{j})$m/s^2 (1,5 s)

$\vec{v}_1 = (20\vec{j})$ m/s - $(14,7\vec{j})$m/s

$\vec{v}_1 = (5,3\ \vec{j})$ m/s

El signo positivo indica que el cuerpo está subiendo.

$\vec{v}_2 = \vec{v}_o + \vec{g}t_2$

$\vec{v}_2 = (20\vec{j})$ m/s + $(-9,8\vec{j})$m/s^2 (3 s)

$\vec{v}_2 = (20\vec{j})$ m/s - $(29,4\vec{j})$m/s

$\vec{v}_2 = (-9,4\ \vec{j})$ m/s

El signo negativo indica que el cuerpo está bajando.

b) $\Delta\vec{r}_1 = \vec{v}_o.t_1 + \frac{1}{2}\vec{g}t_1^2$

$\Delta\vec{r}_1 = (20\vec{j})$ m/s (1,5s) + ½ $(-9,8\vec{j})$m/s^2(9 s^2)

$\Delta\vec{r}_1 = (30\vec{j})$m - $(11,02\vec{j})$m

$\Delta\vec{r}_1 = (18,98\vec{j})$m

$\Delta\vec{r}_2 = v_o.\vec{t}_2 + \frac{1}{2}\vec{g}t_2^2$

$\Delta\vec{r}_2 = (20\vec{j})$ m/s (3s) + ½ $(-9,8\vec{j})$m/s^2(9 s^2)

$\Delta\vec{r}_2 = (60\vec{j})$m - $(44,1\ \vec{j})$m

$\Delta\vec{r}_2 = (15,9\ \vec{j})$m

c) $\cancel{v_f^2}^{\,0} = v_o^2 + 2g\Delta r_{máx}$

$$\Delta r_{máx} = \frac{-v_o^2}{2g} = \frac{-400\ m^2/s^2}{-19,6\ m/s^2} = 20,4\ m$$

$\Delta\vec{r}_{máx} = (20,4\vec{j})$m

d) Tiempo de ascenso:

$$\cancel{v}^{0} = v_o + gt_1 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{-v_o}{g} = \frac{-20m}{-9,8\ m/s^2} = 2,04\ s$$

Tiempo de descenso:

$$\Delta r = \cancel{v_o}^{0}.t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 \quad \Longrightarrow \quad t_2^2 = \frac{2\Delta r}{g} = \frac{-40,8m}{-9,8\ m/s^2} \Longrightarrow t_2 = 2,04\ s$$

Tiempo de vuelo:

$t_T = t_1 + t_2$
$t_T = 2,04\ s + 2,04s$
$t_T = 4,08\ s$

e) $\vec{v} = \cancel{\vec{v}_o}^{0} + \vec{g}t_2$
$\vec{v} = (-9,8\ \vec{j})\ m/s^2\ (2,04)s$
$\vec{v} = (-20\ \vec{j})m/s$

9. Se lanza un móvil con una velocidad de $(25\ \vec{j})$ m/s. Cinco segundos después y desde el mismo punto se lanza otro móvil con una velocidad de $(-16\ \vec{j})$m/s. Determinar:

a) Qué distancia los separa a los 3 s de haber sido lanzado el segundo móvil.
b) Dónde y cuándo se encuentran.

Datos:

$\vec{v}_1 = (25\ j)m/s$
$\vec{v}_2 = (-16\ j)m/s$
$t_1 = 8s$
$t_2 = 3s$

a) $\Delta \vec{r}_1 = \vec{v}_1 t_1 + \frac{1}{2}\vec{g}t_1^2$
$\Delta \vec{r}_1 = (25\ \vec{j})\ m/s\ (8s) + \frac{1}{2}(-9,8\ \vec{j})m/s^2\ (64s^2)$
$\Delta \vec{r}_1 = (200\ \vec{j})\ m - (313,6\ \vec{j})m$
$\Delta \vec{r}_1 = (-113,6\ \vec{j})m$

El signo menos indica que el cuerpo está bajo el punto de partida.

$$\Delta \vec{r}_2 = \vec{v}_2 . t_2 + \frac{1}{2} \vec{g} t_2^2$$

$$\Delta \vec{r}_2 = (-16 \vec{j}) \text{ m/s } (3s) + \frac{1}{2} (-9{,}8 \vec{j}) \text{m/s}^2 (9 \text{ s}^2)$$

$$\Delta \vec{r}_2 = (-48 \vec{j}) \text{m} - (44{,}1 \vec{j}) \text{m}$$

$$\Delta \vec{r}_2 = (-92{,}1 \vec{j}) \text{m}$$

El signo menos indica que el cuerpo está bajo el punto de partida.

$$d_{AB} = \Delta r_1 - \Delta r_2$$
$$d_{AB} = 113{,}6 \text{ m} - 92{,}1 \text{ m}$$
$$d_{AB} = 21{,}5 \text{ m}$$

b) Como $\vec{\Delta}r$ se mide en metros y t en segundos, los desplazamientos realizados por cada móvil son:

$$\Delta \vec{r}_1 = \vec{v}_1 t_1 + \frac{1}{2} \vec{g} t_1^2 = 25t_1 - 4{,}9t_1^2$$
$$\Delta \vec{r}_2 = \vec{v}_2 t_2 + \frac{1}{2} \vec{g} t_2^2 = -16t_2 - 4{,}9t^2; \quad t_2 = t_1 - 5$$
$$= -16 (t_1 - 5) - 4{,}9 (t_1 - 5)^2$$

En el punto de encuentro, los desplazamientos son iguales:

$$\Delta r_1 = \Delta r_2$$
$$25t_1 - 4{,}9t_1^2 = -16(t_1 - 5) - 4{,}9 (t_1 - 5)^2$$
$$25t_1 - 4{,}9t_1^2 = -16 t_1 + 80 - 4{,}9(t_1^2 - 10t_1 + 25)$$
$$25t_1 - 4{,}9t_1^2 = -16t_1 + 80 - 4{,}9t_1^2 + 49t_1 - 122{,}5$$
$$-8t_1 = -42{,}5$$

$t_1 = 5{,}31$ s de haber sido lanzado el primer móvil.

$$\Delta r_1 = 25t_1 - 4{,}9t_1^2$$
$$\Delta r_1 = 25(5{,}31) - 4{,}9 (5{,}31)^2$$
$$\Delta r_1 = 132{,}75 - 138{,}16$$

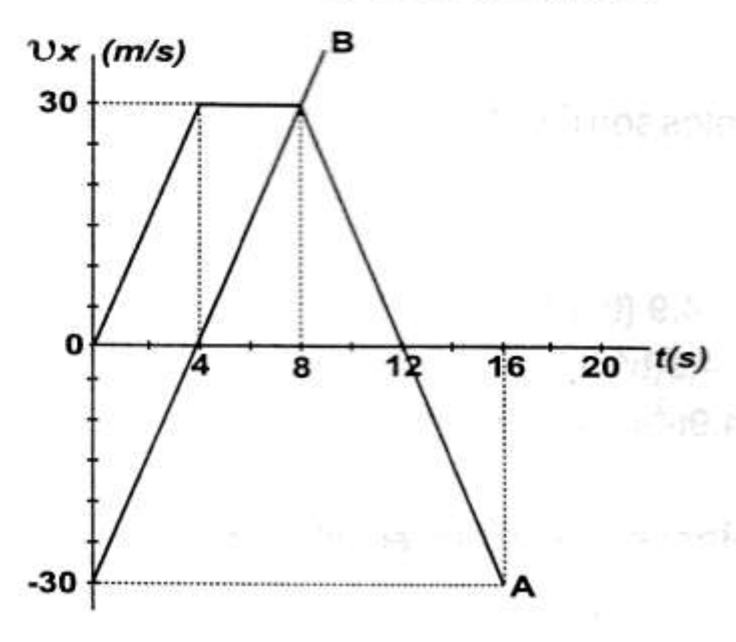
$\Delta r_1 = -5{,}41$m por debajo del punto de lanzamiento

EJERCICIO N°8

1. Una partícula se mueve con MRUV retardado y aceleración (15m/s² N15°E). Si a t=0, la partícula se encuentra en la posición (-2,3)m y su rapidez es de 8m/s. Para un intervalo entre 0 y 8s; determinar:

a) El desplazamiento realizado
b) La velocidad media

2. El gráfico υ_x-t, representa el movimiento de dos partículas A y B que parten de una misma posición inicial y sobre la misma trayectoria rectilínea.



Determinar:

a) El tipo de movimiento de cada partícula en cada intervalo.
b) La distancia que recorre cada partícula de 0(s) hasta 12(s).
c) La distancia que existe entre las dos partículas a los 4(s), 8(s) y 12(s).
d) Dónde y cuándo se encontrarán gráfica y analíticamente.
e) Los gráficos *rx-t* y *ax-t* de cada partícula.

3. Un móvil se desplaza a lo largo del eje X con una aceleración constante. Si su posición para t=0 es $30\vec{i}$ m y se mueve en dirección X negativa con una rapidez de 15m/s que está disminuyendo a razón de 1.5m/s cada s; determinar:

a) La aceleración.
b) El gráfico velocidad contra tiempo.
c) El gráfico posición contra tiempo.
d) El tiempo que tarda la partícula en recorrer los primeros 75m.

4. El móvil A parte al encuentro con B, con una rapidez inicial de 10m/s y acelerando a 3m/s² en línea recta; cinco segundos más tarde B parte hacia A desde el reposo y con una aceleración constante de 5m/s² también en línea recta. Si inicialmente A y B están separados una distancia horizontal de 1700m; determinar:

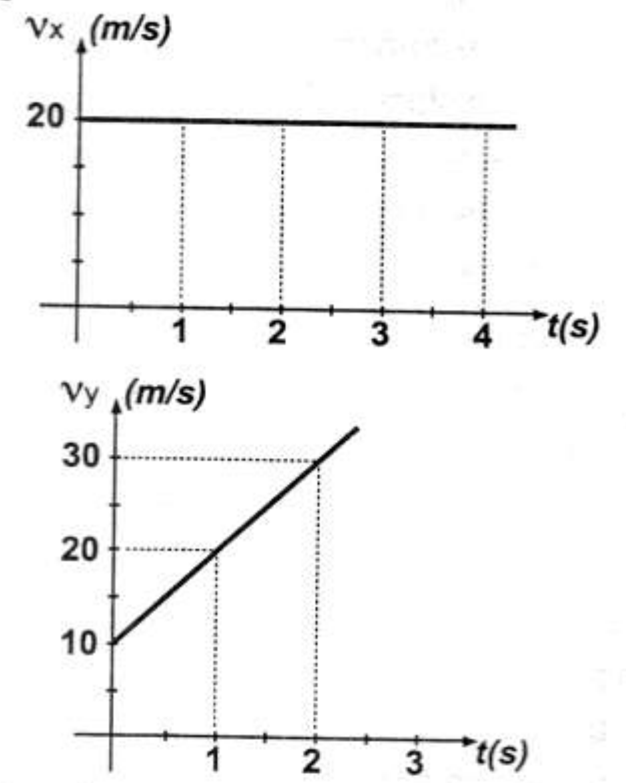
a) Dónde y cuándo se encuentran.
b) En cuánto tiempo quedan a 500m de distancia mientras se acercan y también mientras se alejan.

5. Dos vehículos A y B se desplazan con MRUV. A se acelera a razón de 3m/s² y pasa por el punto P(3,5)m con una velocidad $(-3\vec{i}-4\vec{j})$m/s, en ese mismo momento B pasa por el punto Q(-1,3)m con una velocidad de $-30\vec{j}$ m/s y desacelera a razón de 2m/s²; determinar:

a) La aceleración de cada uno de los vehículos.

b) La posición de A y de B después de 7s.

6. Una partícula se mueve de manera que su velocidad cambia con el tiempo como se indica en los gráficos siguientes:



Determinar:

a) El vector velocidad para t=0s, t=1s, t=2s, t=3s.

b) El vector aceleración para t=0s, t=1s, t=2s, t=3s.

c) Si la partícula tiene movimiento rectilíneo.

7. Una partícula se mueve a lo largo del eje X, inicia su recorrido en el punto -8m desde el reposo y acelera a razón de $5 m/s^2$ hasta que alcanza el punto 12m y entonces mantiene la velocidad alcanzada constante por 5s y luego desacelera hasta detenerse 5s más tarde; determinar:

a) Cuánto tiempo tuvo movimiento acelerado.

b) La distancia que recorrió con MUR.

c) El desplazamiento total y la aceleración durante los últimos 5s.

8. Desde la ventana de un edificio se lanzan dos piedras A y B. La piedra A se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial igual a la que B es lanzada verticalmente hacia abajo; determinar:

a) Cuál de las dos piedras tiene mayor rapidez al llegar al suelo.

9. Dos partículas A y B se mueven con MRUV acelerado con la misma aceleración cuyo módulo es $2 m/s^2$. Sí para t=0s la rapidez de A es 5m/s y la de B 2,5m/s; determinar:

a) Cuándo A ha recorrido 100m y cuándo B ha recorrido 50m.

b) Cuándo la relación entre la rapidez de A y la rapidez de B es 3/2.

10. Un avión toma la pista con una aceleración de $-20\vec{i}\ m/s^2$ y recorre en línea recta $200\vec{i}$ m antes de detenerse; determinar:

a) Con qué velocidad toca la pista.

b) Qué tiempo demora en detenerse.

c) Con qué velocidad constante un auto recorrería esa misma distancia en ese mismo tiempo.

EJERCICIO N°8

11. Un observador ve pasar por su ventana ubicada a 50m de altura un objeto hacia arriba y 3s después lo ve pasar hacia abajo; determinar:

a) La velocidad con la que fué lanzado el objeto desde la base del edificio.

b) La altura que alcanzó respecto a la base del edificio.

12. Dos cuerpos A y B situados sobre la misma vertical distan 65m, si son lanzados uno contra otro con rapidez de 16m/s y 12 m/s respectivamente; determinar:

a) Dónde y cuándo se chocan, si A sube y B baja.

b) Dónde y cuándo se chocan, si A baja y B sube.

13. Desde un globo que se encuentra a 100m de altura, se deja caer un objeto; determinar:

a) Cuánto tiempo tarda el objeto en tocar el suelo si el globo está en reposo.

b) Cuánto tiempo tarda el objeto en llegar el suelo si el globo ascendía a 1m/s.

c) Cuánto tiempo tarda el objeto en llegar el suelo si el globo descendía a 1m/s.

14. Se deja caer una piedra desde una gran altura; determinar:

a) El módulo del desplazamiento durante los 5 primeros segundos.

b) El módulo del desplazamiento durante los 5 segundos siguientes.

c) La rapidez alcanzada al final de cada uno de los intervalos anteriores.

15. Los móviles A y B parten por una trayecoria rectilínea desde el mismo punto y desde el reposo con una aceleración constante de $2\vec{i}$ m/s² cada uno y B parte 2s más tarde; determinar:

a) La distancia entre A y B cuándo han transcurrido 2s de haber partido A.

b) La distancia entre A y B cuándo han transcurrido 4s de haber partido A.

c) La distancia entre A y B a los 6s de haber partido A.

16. Una partícula con MRUV se mueve a lo largo del eje X. Cuando t=0s se encuentra a 1 m a la izquierda del origen, a t=3s se encuentra a 15 m a la derecha del origen, y a t=5s se encuentra a 20m a la derecha del origen; determinar:

a) La acelereción de la partícula.

b) El instante en que retorna al origen.

17. Una partícula inicialmente en reposo en el origen de coordenadas, se mueve con una aceleración de $5\vec{i}$ m/s² hasta que su velocidad es de $10\vec{i}$ m/s, en ese instante se le somete a una aceleración de $-10\vec{i}$ m/s² hasta que la distancia total recorrida desde que partió del reposo es 30m; determinar:

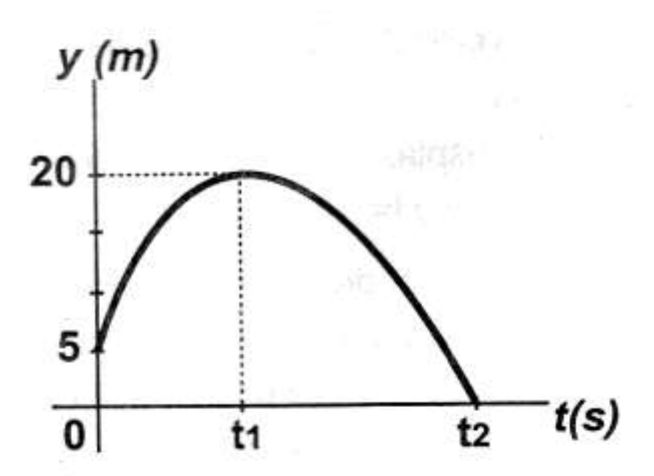
a) La velocidad media para todo el recorrido.

b) El gráfico Vx contra t.

18. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba, su posición cambia con el

EJERCICIO N°8

tiempo como indica la figura, siendo el nivel de referencia el suelo.



Determinar:

a) Los valores de t_1 y t_2

b) La velocidad con la que llega al suelo.

19. Dos autos A y B se desplazan por la misma trayectoria rectilínea. A se mueve con una velocidad constante de $-8\vec{i}$ m/s y parte de la posición $-7\vec{i}$ m. B inicia en el punto $-5\vec{i}$ m con una velocidad de $8\vec{i}$ m/s y al tiempo t=4s su velocidad es $-8\vec{i}$ m/s. Si B se mueve con aceleración constante; determinar:

a) La aceleración de B

b) En qué instante coinciden las posiciones de A y B.

20. Una partícula se mueve con MRUVA de modo que la magnitud de su desplazamiento de 0 a 2s es 40m y de 2 a 4s es 65m; determinar:

a) La magnitud de la aceleración.

b) El módulo del desplazamiento entre 0 y 10s.

21. Dos partículas A y B se mueven sobre carreteras rectas. A se mueve con aceleración constante de modo que en t_o=0s, $\vec{r_o}$= $-300\vec{i}$ m y v_o=$30\vec{i}$ m/s y en t_1=10s, $\vec{r_1}$=$10\vec{i}$ m, B se mueve con velocidad constante de modo que en t_o=0s, $\vec{r_o}$=$200\vec{j}$ m y en t_1=10s, $\vec{r_1}$=$300\vec{i}$ m; determinar:

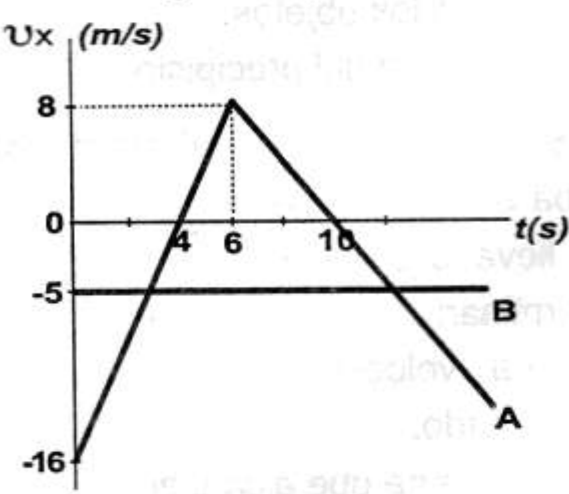
a) La velocidad de A en t_1=10s.

b) La velocidad de A respecto a B en t_1=10s.

22. Se deja caer libremente un objeto desde una altura de 120m medida desde el suelo, en ese mismo instante se arroja hacia abajo un segundo objeto desde una altura de 190m; determinar:

a) La velocidad inicial del segundo objeto para que los dos lleguen al piso al mismo tiempo.

23. Dos móviles A y B se mueven de acuerdo al siguiente gráfico:



Si parten del origen; determinar:

a) La posición de cada móvil para t=10s.

b) La posición y el tiempo en que los dos móviles de encuentran por primera vez luego de partir.

EJERCICIO N° 8

24. Un automóvil viaja a 18m/s y un bus a 12m/s sobre una carretera recta en direcciones contrarias. De manera simultánea los choferes se ven y frenan de inmediato, el auto disminuye su rapidez a razón de 2m/s² y el bus a 3m/s²; determinar:

a) La distancia mínima entre los dos al momento que frenan para evitar que colisionen.

25. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una cierta rapidez inicial desde el borde de un precipicio y en 9s llega al fondo. Luego desde el mismo lugar se lanza otro objeto verticalmente hacia abajo con la misma rapidez inicial y tarda 2s en llegar al fondo; determinar:

a) La rapidez inicial con la que fueron lanzados los objetos.

b) La altura del precipicio.

26. Se dispara verticalmente hacia arriba un móvil y cuando ha ascendido 5m lleva una velocidad de $10\vec{j}$ m/s; determinar:

a) La velocidad con la que fue disparado.

b) La altura que alcanza.

c) El tiempo que demora en ascender esos 5m y el que demora en pasar nuevamente por dicha posición.

27. Una partícula se mueve a lo largo del eje X, a t=2s, su velocidad es $16\vec{i}$ m/s y su aceleración es constante e igual a $-2\vec{i}$ m/s²; determinar:

a) La velocidad de la partícula a t=5s y t=15s.

b) El desplazamiento de la partícula entre t=5s y t=15s.

28. En el interior de un tren que parte del reposo y acelera a razón de $4\vec{i}$ m/s², un objeto desliza sin rozamiento por el piso del vagón con una velocidad de $8\vec{i}$ m/s respecto a tierra; determinar:

a) El tiempo que debe transcurrir para que el objeto alcance nuevamente su posición original.

b) En ese mismo momento la velocidad instantánea del vagón respecto a tierra.

c) En ese instante, la velocidad del objeto respecto a la velocidad del vagón.

29. Un cohete es lanzado verticalmente hacia arriba, dese el reposo, con una aceleración constante de $14{,}7\vec{j}$ m/s² durante 8s, en ese momento se le acaba el combustible y el cohete continua moviéndose de manera que únicamente queda sujeto a la gravedad de la tierra; determinar:

a) La altura máxima que alcanza el cohete.

b) El tiempo que tarda en regresar a la tierra.

c) El gráfico velocidad - tiempo para este movimiento.

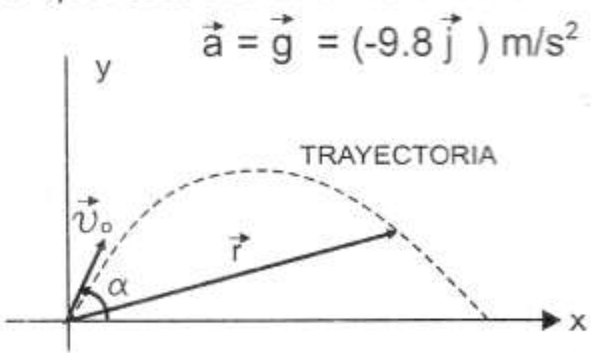
2.3 MOVIMIENTOS EN UN PLANO

Entre los diversos movimientos que existen en la naturaleza, los contenidos en un plano son de interés para la humanidad, por sus aplicaciones y para la comprensión del Universo. Como ejemplo de estos movimientos podemos citar el de los planetas en su traslación alrededor del Sol, el de los satélites, el de los proyectiles en la superficie terrestre, etc.
De estos movimientos coplanares, estudiaremos el parabólico y el circular.

MOVIMIENTO PARABÓLICO. Es curvilíneo plano, con trayectoria parabólica y aceleración total constante.

El movimiento parabólico más imponante lo constituye el lanzamiento de proyectiles, en el que la aceleración total es la aceleración de la gravedad.

$\vec{a} = \vec{g} = (-9.8\,\vec{j}\,)\ m/s^2$



$\vec{v}_o$ = velocidad inicial

α = ángulo de lanzamiento

En el movimiento parabólico la velocidad inicial no puede ser nula y su dirección debe ser diferente a la de la aceleración:

$$\vec{v}_o \neq 0 \ \text{ y } \vec{u}_{v_o} \neq \vec{u}_a$$

Las ecuaciones que permiten el estudio del movimiento parabólico son las que se describieron anteriormente para el caso en que la aceleración es constante **(2.2.5)** y **(2.2.3)**:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2$$

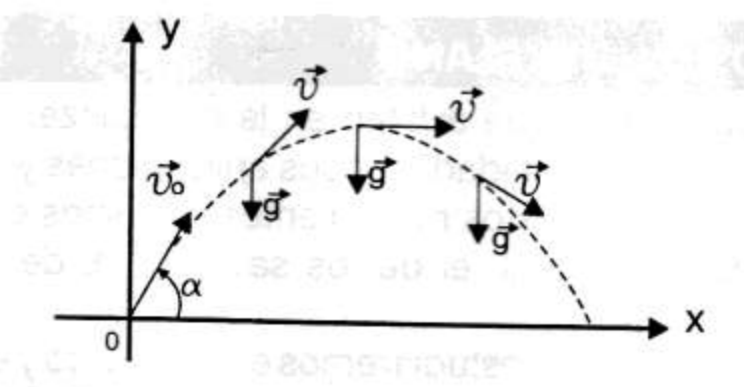
$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}.t$$

Y para el caso en que $\vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}.t$$

El análisis del movimiento de un proyectil se realiza en función del vector velocidad inicial:



La velocidad inicial en función de sus componentes es:

$$\vec{v}_o = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j} \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

Y su dirección

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{v_{oy}}{v_{ox}} \qquad \textbf{(2.3.2)}$$

La velocidad en cualquier punto de la trayectoria es:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \qquad \textbf{(2.3.3)}$$

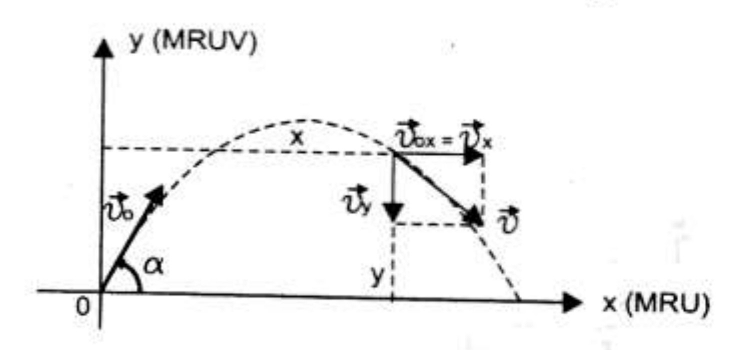
Reemplazando **(2.3.3)** y **(2.3.1)** en :

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}.t \text{ , tenemos}$$
$$v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j} + gt\vec{j}$$

Igualando los componentes en ***x*** e ***y:***

$$v_x = v_{ox} \qquad \text{(MRU)} \qquad \textbf{(2.3.4)}$$
$$v_y = v_{oy} - gt \qquad \text{(MRUV)} \qquad \textbf{(2.3.5)}$$

De estos resultados, se concluye que el movimiento parabólico es compuesto: resulta de la *suma simultánea* de un MRU en el eje horizontal **x** y un MRUV en el eje vertical ***y*** :



En el eje ***x***:

$a_x = 0$
$v_{ox} = v_o \cos\alpha = v_x = \text{cte.}$
$x = v_{ox}.t$ **(2.3.6)**

En el eje ***y***:

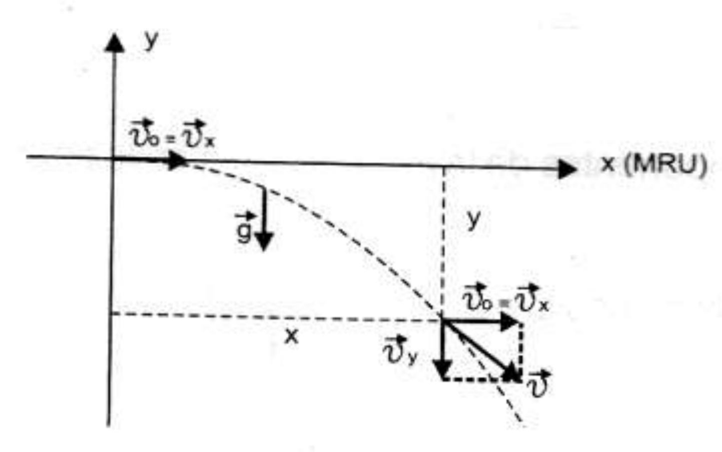
$a_y = -g$
$v_y = v_{oy} - gt$ donde $v_{oy} = v_o.\text{sen}\,\mathbf{x}$
$y = v_{oy}.t - \frac{1}{2}gt^2$ **(2.3.7)**

Los parámentros más importantes del movimiento parabólico, a más de conocer el valor de la aceleración, son: el valor velocidad inicial $\vec{v}_o = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j}$ (rapidez de lanzamiento v_o) y el ángulo que ésta hace con el eje **x** (ángulo de lanzamiento α).

El valor de α puede ser cualquiera; generalmente un ángulo agudo, pero podría tener un valor de $\alpha = 90°$ o $\alpha = 0°$.

Cuando a = 90° se tiene un lanzamiento vertical hacia arriba, analizado ya como un MRUV.

Si $\alpha = 0°$, es un lanzamiento horizontal, donde $v_o = v_x$ y $v_{oy} = 0$. Este caso aplicado al movimiento de un proyectil y analizado como la suma de dos movimientos, sería: en el eje ***x*** un MRU (v_x = cte) y en el eje ***y*** una caída libre ($v_{oy} = 0$):



En el eje ***x***:

$a_x = 0$

$v_o = v_{ox} = v_x$ = cte.

$x = v_o.t$ **(2.3.8)**

En el eje ***y***:

$a_y = -g$

$v_y = v_{oy} - gt$

$v_y = -gt$ **(2.3.9)**

$y = v_{oy}.t - \frac{1}{2}gt^2$

$y = -\frac{1}{2}gt^2$ **(2.3.10)**

Las ecuaciones **(2.3.6)** y **(2.3.7)** se denominan paramétricas de la trayectoria. Si en **(2.3.6)** despejamos t y reemplazamos en **(2.3.7)**, obtenemos la ecuación cartesiana:

$$x = v_x.t$$

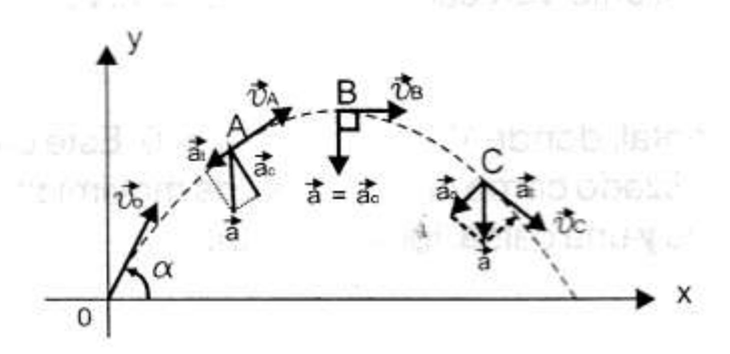
$$t = \frac{x}{v_x} = \frac{x}{v_o \cos\alpha}$$

$$y = v_{oy}.t - \frac{1}{2}gt^2 = v_o \operatorname{sen}\alpha \left[\frac{x}{v_o \cos\alpha}\right] - \frac{1}{2}g\left[\frac{x}{v_o \cos\alpha}\right]^2$$

$$y = (\operatorname{tag}\alpha)x - \left[\frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha}\right]x^2$$

Esta ecuación es de la fonna: $y = ax - bx^2$; una ecuación de segundo grado, cuya representación gráfica corresponde a una parábola.

En el movimiento parabólico la velocidad varía simultáneamente en módulo y dirección. Por consiguiente, se generan aceleraciones tangencial ($\vec{a}t$)y centrípeta (normal $\vec{ac}$) respectivamente. Estas aceleraciones son variables, pero en cada instante su suma (aceleración total) es constante.



Del análisis de las componentes de la aceleración a en los puntos A, B y C, se puede concluir que:

a) En el punto A la partícula está subiendo y la aceleración tangencial tiene la misma dirección que la velocidad, pero sentido contrario. Por ello, el movimiento es retardado. La aceleración total ($\vec{a}$)es:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

b) En el punto B la partícula alcanza la máxima altura y la velocidad es horizontal y perpendicular a la aceleración total. La aceleración tangencial es nula porque es la proyección de la aceleración total en la dirección del vector velocidad. La aceleración total es:

$$\vec{a} = \cancelto{0}{\vec{a}_T} + \vec{a}_C$$
$$\vec{a} = \vec{a}_C$$

c) En el punto C la partícula está descendiendo y la aceleración tangencial tiene la misma dirección y sentido que la velocidad. Entonces, el movimiento es acelerado. La aceleración total es:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

En cualquier posición, la aceleración tangencial es la proyección de la aceleración total en la dirección de la velocidad. Por esta razón, si se conocen los vectores velocidad y aceleración, aplicando **(1.5.9)**, tendremos:

$\vec{A}_v = A \cos\theta\, \vec{u}_v$

$\vec{A}_v = \dfrac{\vec{A}.\vec{v}}{v}\, \vec{u}_v$

$\vec{A}_v = (\vec{A}.\vec{u}_v).\vec{u}_v$, de donde:

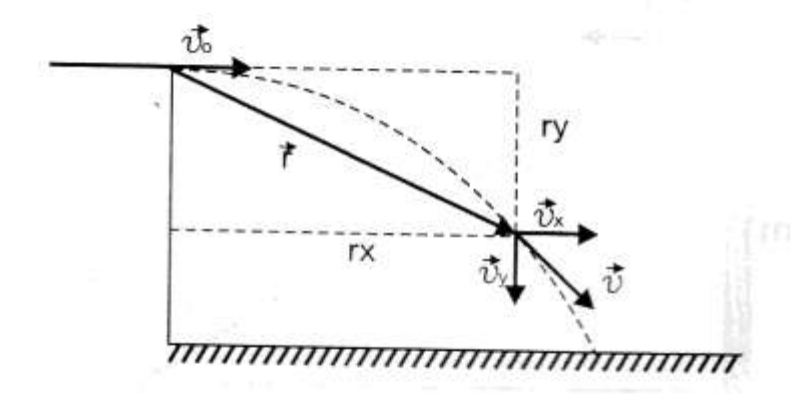
$\vec{a}_T = (\vec{a}.\vec{u}_v).\vec{u}_v$

Y la aceleración centrípeta será:

$$\vec{a}_C = \vec{a} - \vec{a}_T$$

EJEMPLOS

1. Desde lo alto de un edificio se dispara un proyectil con una velocidad de $(12\vec{i})$ m/s.
   Determinar a los 5 s:
   a) La aceleración total.
   b) La posición del cuerpo.
   c) La distancia recorrida horizontal y verticalmente.
   d) La velocidad de la partícula.
   e) La aceleración tangencial y centrípeta.



a) $\vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a} = (-9,8\vec{j})$ m/s^2

b) $\vec{r} = \cancel{\vec{r}_o}^{\,0} + \vec{v}_o.t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

$\vec{r} = (12\vec{i})$m/s $(5\text{ s}) + (-4,9\vec{j})$ m/s^2 (25 s^2)

$\vec{r} = (60\vec{i} - 122,5\vec{j})$m

c) $\vec{r} = (60\vec{i} - 122,5\vec{j})$m

$\vec{r} = rx\vec{i} + ry\vec{j}$

La distancia recorrida en el eje ***x*** es rx = 60 m

La distancia recorrida en el eje ***y*** es ry = -122,5 m.

d) $\upsilon_x = \upsilon_o = 12$ m/s

$\upsilon_y = gt$

$\upsilon_y = (-9,8 \text{ m/s}^2)(5\text{s})$

$\upsilon_y = -49$ m/s

$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j}$

$\vec{\upsilon} = (12\vec{i} - 49\vec{j})$m/s

e) $\vec{a}_T = (\vec{a}.\vec{u}\upsilon)\vec{u}.\upsilon$

$\vec{a}_T = (a_x\ u_x + a_y u_y)u\vec{\upsilon}$

$\vec{a}_T = [0(0,238) + (-9,8)(-0,971)](0,238\vec{i} - 0,971\vec{j})$

$\vec{a}_T = (2,26\vec{i} - 9,24\vec{j})$ m/s²

$\vec{a}_C = \vec{a} - \vec{a}_T$

$\vec{a}_C = (-9,8\vec{i})$m/s $- (2,26\vec{i} - 9,24\vec{j})$m/s²

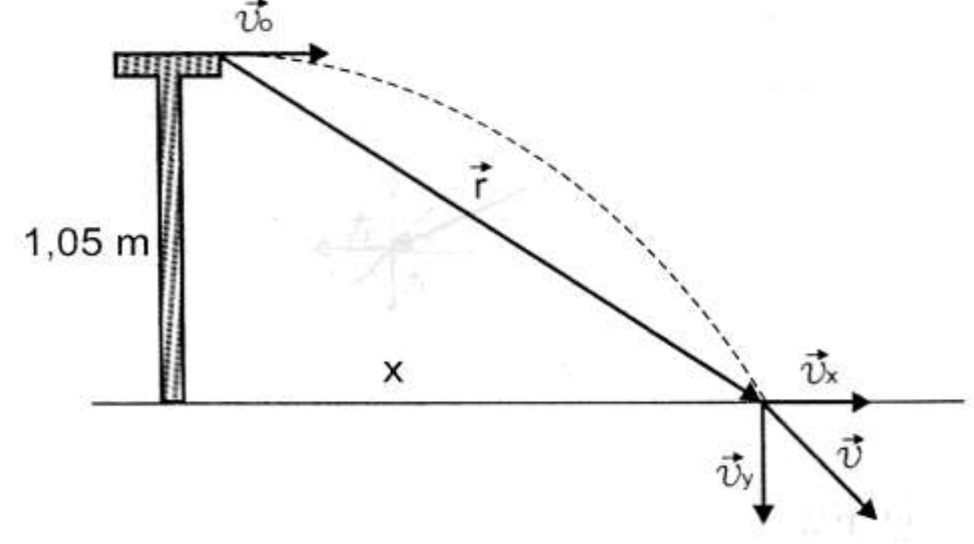
$\vec{a}_C = (2,26\vec{i} - 0,56\vec{j})$m/s²

$\vec{\upsilon} = (12\vec{i} - 49\vec{j})$m/s

$\vec{u}_\upsilon = (0,238\vec{i} - 0,971\vec{j})$

2. Un cuerpo rueda sobre el tablero horizontal de una mesa de 1,05 m de altura y abandona ésta con una velocidad de $(4\vec{i})$m/s. Determinar:

a) A qué distancia del borde de la mesa, el cuerpo golpea el suelo.
b) La posición del cuerpo cuando llega al suelo.
c) Con qué velocidad golpea contra el suelo.
d) La aceleración total, tangencial y centrípeta en el momento de llegar al suelo.



a) y = ½ gt

$$t^2 = \frac{2y}{g}$$

$$t^2 = \frac{-2,1\text{m}}{-9,8 \text{ m/s}} \Longrightarrow t = 0,46 \text{ s}$$

x = υ_o.t

x = 4m/s. 0,46 s

x = 1,84 m

b) rx = 1,84 m

ry = -1,05 m

$\vec{r} = rx\vec{i} + ry\vec{j}$

$\vec{r} = (1,84\vec{i} - 1,05\vec{j})$m

c) $v_x = v_o = 4$ m/s

$v_y = gt$

$v_y = (-9,8\ m/s^2)(0,46\ s)$

$v_y = -4,5$ m/s

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$

$\vec{v} = (4\vec{i} - 4,5\vec{j})m/s$

d) $\vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a} = (-9,8\vec{j})m/s^2$

$\vec{a}_T = (\vec{a}.\vec{u}_v)\vec{u}_v$

$\vec{a}_T = (a_x u_x + a_y u_y)\vec{u}_v$

$\vec{a}_T = [0(0,664) + (-9,8)(-0,748)](0,664\vec{i} - 0,748\vec{j})$

$\vec{a}_T = (4,87\vec{i} - 5,48\vec{j})m/s^2$

$\vec{a}_C = \vec{a} - \vec{a}_T$

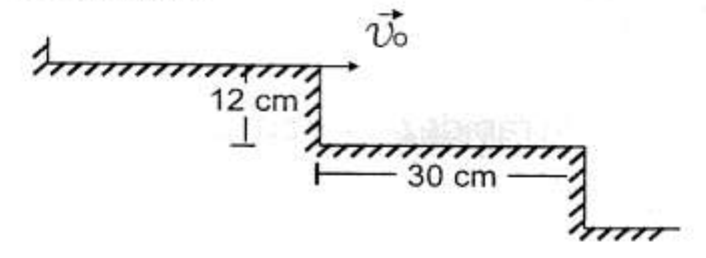
$\vec{a}_C = (-9,8\vec{i})m/s - (4,87\vec{i} - 5,48\vec{j})m/s^2$

$\vec{a}_C = (-4,87\vec{i} - 4,32\vec{j})m/s^2$

$\vec{v} = (4\vec{i} - 4,5\vec{j})m/s$

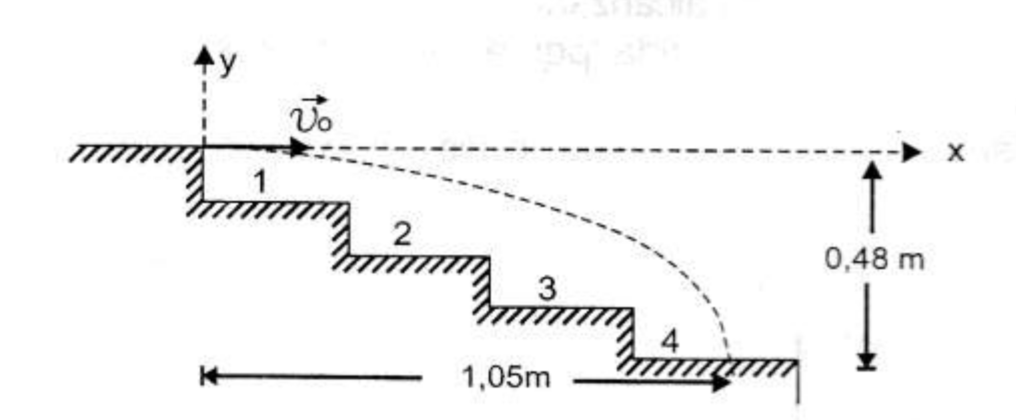
$\vec{u}_v = 0,664\vec{i} - 0,748\vec{j}$

3. Los peldaños de una escalera miden 12 cm de altura y 30 cm horizontalmente, como indica la figura. Determinar:



a) Cuál es la velocidad en dirección horizontal que debe comunicarse a una bola para que su primer rebote sea en la mitad del cuarto escalón.

b) Qué velocidad tiene la bola en el instante del primer impacto.



a) $\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} = (v_o.t)\vec{i} + (\frac{1}{2}gt^2)\vec{j}$

En el istante del impacto:

$\vec{r} = (1,05\vec{i} - 0,48\vec{j})\ m = [(v_o t)\vec{i} - (4,9\ t^2)\vec{j}]m$

La posición en el eje ***y*** es:

$$r_y = \frac{1}{2} g t^2$$
$$-0{,}48 \text{ m} = -4{,}9 \text{ m/s } t^2$$

$$t^2 = \frac{0{,}48 \text{ m}}{4{,}9 \text{ m/s}} \Rightarrow t = 0{,}31 \text{ s}$$

La posición en el eje **x** es:

$r_x = v_o t$, para $t = 0{,}31$ s
$1{,}05 \text{ m} = v_o (0{,}31 \text{ s})$

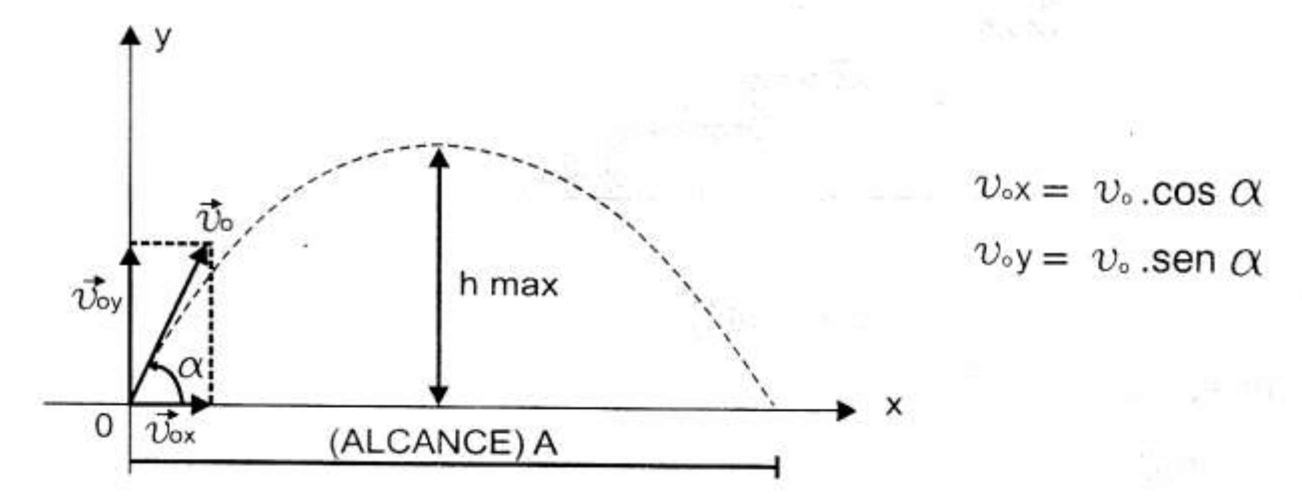
$$v_o = \frac{1{,}05 \text{ m}}{0{,}31 \text{ s}} = 3{,}38 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_o = (3{,}38 \vec{i}) \text{m/s}$$

b) $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t$
$\vec{v} = [3{,}38\vec{i} - (9{,}8 \; t)\vec{j}] \text{ m/s}$, para $t = 0{,}31$ s
$\vec{v} = \{3{,}38 \vec{i} - [9.8(0.31)\vec{j}]\} \text{m/s}$
$\vec{v} = (3{,}38 \vec{i} - 3{,}04 \vec{j}) \text{m/s}$

4. Un proyectil es lanzado con una rapidez v_o y su dirección forma un ángulo α sobre la horizontal. Determinar:

a) El vector velocidad inicial.
b) El vector velocidad en función del tiempo t.
c) El vector posición en función del tiempo t.
d) El tiempo transcurrido desde el lanzamiento hasta que el proyectil alcanza la altura máxima (tiempo de subida) y el necesario para regresar al nivel horizontal del lanzamiento (tiempo de vuelo).
e) El vector de la altura máxima alcanzada.
f) La distancia horizontal cubierta por el proyectil hasta regresar al nivel de lanzamiento (alcance).
g) El valor del ángulo α para que el alcance sea el máximo posible.



a) $\vec{v}_o = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j}$

$\vec{v}_o = v_o \cos\alpha\,\vec{i} + v_o \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$

b) $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}.t$

$\vec{v} = (v_o \cos\alpha\,\vec{i} + v_o \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}) - (9{,}8\,\vec{j})t^2$

$\vec{v} = v_o \cos\alpha\,\vec{i} + (v_o \operatorname{sen}\alpha - 9{,}8t)\vec{j}$

c) $\vec{r} = \vec{r}_o^{\,0} + \vec{v}_o.t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

$\vec{r} = (v_o \cos\alpha\,\vec{i} + v_o \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j})t + \frac{1}{2}(-9{,}8\,\vec{j})\,t^2$

$\vec{r} = (v_o \cos\alpha t)\vec{i} + (v_o \operatorname{sen}\alpha.t - 4{,}9t^2)\vec{j}$

d) Cuando el proyectil llega al punto de máxima altura, su componente de velocidad en el eje ***y*** es nula:

$\vec{v} = v_o \cos\alpha\,\vec{i} + (v_o \operatorname{sen}\alpha - 9{,}8\,t)\vec{j} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j}$

$v_y = 0 = v_o \operatorname{sen}\alpha - 9{,}8\,t_s$, donde t_s = tiempo de subida.

$$t_s = \frac{v_o \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_{oy}}{g} \qquad \textbf{(2.3.13)}$$

Si el proyectil regresa al nivel de lanzamiento, la componente de su posición en y será nula:

$\vec{r} = (v_o \cos\alpha\,t)\vec{i} + (v_o \operatorname{sen}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{j} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$

$r_y = 0 = v_o \operatorname{sen}\alpha.t_v - \frac{1}{2}gt_v^2$, donde t_v = tiempo de vuelo.

$$t_v = \frac{2\,v_o \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{2\,v_{oy}}{g} \qquad \textbf{(2.3.14)}$$

De esto se concluye que $t_v = 2t_s$; o que el tiempo que el proyectil demora en subir es igual al que demora en bajar con relación a un mismo nivel horizontal.

e) La altura máxima será el valor de la componente de la posición en ***y***, en el instante en que el tiempo es definido como tiempo de subida:

$$t_s = \frac{v_o y}{g} = \frac{v_o \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} = (v_o \cos\alpha t)\vec{i} + (v_o \operatorname{sen}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{j}$

$r_y = v_o \operatorname{sen}\alpha\,t - \frac{1}{2}gt^2$, si $t = t_s \Rightarrow r_y = h\,máx$:

$$hmáx = rymáx = v_o \, sen\alpha \frac{v_o \, sen\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_o^2 sen^2\alpha}{g^2}$$

$$hmáx = \frac{v_o^2 sen^2\alpha}{g} - \frac{v_o^2 \, sen\,\alpha^2}{2g}$$

$$hmáx = \frac{v_o^2 sen^2\alpha}{2g} = \frac{(v_{oy})^2}{2g} \qquad \textbf{(2.3.15)}$$

f) El tiempo transcurrido para que el proyectil regrese al nivel de lanzamiento, es el que se ha definido como tiempo de vuelo:

$$t_v = \frac{2 v_o y}{g} = \frac{2 v_o sen\alpha}{g}$$

Y la distancia horizontal será el valor de la componente de la posición en la dirección x:

$rx = (v_o \cos\alpha \; t)\vec{i}$, si $t = t_v$, $rx = A$ = alcance

$$A = rx = v_o \cos \alpha \frac{2 v_o sen\alpha}{g}$$

$A = \dfrac{v_o^2 (2\, sen\alpha \cos\alpha)}{g}$, donde utilizando la identidad trigonométrica $sen2\,\alpha = 2sen\,\alpha \; \cos\alpha$, tenemos:

$$A = \frac{v_o^2 sen2\alpha}{g} \qquad \textbf{(2.3.16)}$$

g) El módulo del alcance depende únicamente del valor del ángulo de lanzamiento α Para que el alcance sea máximo, el valor del sen2 α debe ser también máximo. Como el máximo valor de la función seno es uno, entonces:

$A = \dfrac{v_o^2 sen2\alpha}{g}$; para que el alcance sea máximo:

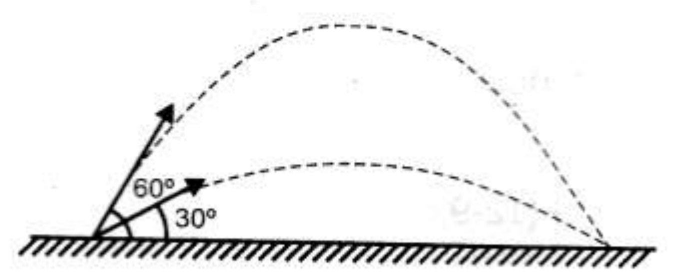
$sen\, 2\alpha = 1$

$2\alpha = sen^{-1} 1$

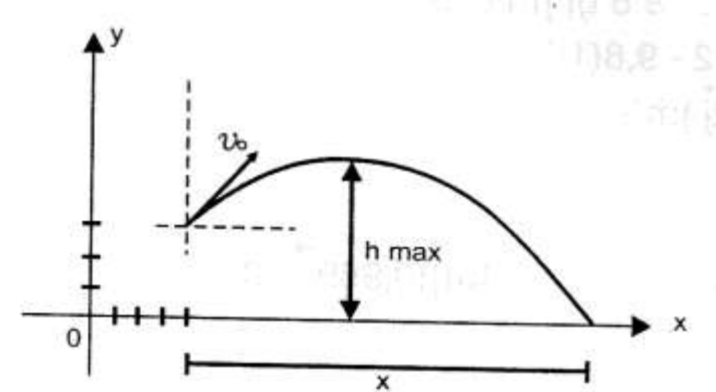
$2\alpha = 90°$

$\alpha = 45°$

El alcance es máximo cuando el ángulo de lanzamiento es de 45°, Para cualquier otro ángulo de lanzamiento distinto de 45°, el alcance horizontal será menor. Ángulos complementarios tienen alcances iguales:



5. Se lanza un proyectil desde un punto de coordenadas (4, 3) m con una velocidad de (15 i + 12 j) m/s, Determinar:
   a) La aceleración, velocidad y posición para cualquier tiempo.
   b) El tiempo de vuelo.
   c) El alcance horizontal.
   d) La altura máxima.
   e) La velocidad del proyectil en 1s
   f) La aceleración tangencial y la centrípeta en 1s



a) $\vec{a} = \vec{g}$

$\vec{a} = (-9{,}8\,\vec{j})\ m/s^2$

$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t$

$\vec{v} = [15\,\vec{i} + 12\vec{j} - (9{,}8t)\vec{j}]\ m/s$

$\vec{v} = [15\,\vec{i} + (12 - 9{,}8t)\vec{j}]\ m/s$

$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{v}_o.t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

$\vec{r} = [4\vec{i} + 3\vec{j} + (15\vec{i} + 12\vec{j})t - (4{,}9\,t^2)\vec{j}]m$

$\vec{r} = [4\vec{i} + 3\vec{j} + (15t)\vec{i} + (12t)\vec{j} - (4{,}9\,t^2)\vec{j}]m$

$\vec{r} = [(4 + 15t)\vec{i} + (3 + 12t - 4{,}9\,t^2)\vec{j}]m$.

b) En el tiempo de vuelo se cumple que ry = 0

$\vec{r} = rx\,\vec{i} + ry\,\vec{j} = (4 + 15t)\,\vec{i} + (3 + 12t - 4{,}9\,t^2)\vec{j}$

$ry = 3 + 12t - 4{,}9t^2 = 0$

$4{,}9t^2 - 12t - 3 = 0$, de donde:

$t_v = 2{,}68\ s$

c) El alcance horizontal es la posición horizontal que tiene el proyectil en t_v :

$$r_x = (4 + 15t)\,m$$
$$r_x = [4 + 15(2,68)]\,m$$
$$r_x = 44,20\ m$$

d) La altura máxima es la posición vertical que tiene el proyectil en t_s, la cual se obtiene cuando $\upsilon_y = 0$.

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} = 15\vec{i} + (12\text{-}9,8t)\,\vec{j}$$
$$\upsilon_y = 12 - 9,8t_s = 0$$
$$t_s = \frac{12\ s}{9,8} = 1,22\ s$$

$$r_y = (3 + 12t - 4,9\,t^2)\,m$$
$$r_y = [3 + 12(1,22) - 4,9(1,22)^2]\,m$$
$$r_y = 10,35\ m$$

e) $\vec{\upsilon} = [15\vec{i} + (12 - 9,8\,t)\vec{j}\,]\,m/s$, para $t = 1$ s

$$\vec{\upsilon} = \{15\vec{i} + [12 - 9,8(1)]\,\vec{j}\}\,m/s$$
$$\vec{\upsilon} = (15\vec{i} + 2,2\vec{j}\,)\,m/s$$

f) $\vec{\upsilon} = (15\vec{i} - 2,2\vec{j})\,m/s$

$\vec{u}_\upsilon = 0,989\vec{i} - 0,145\vec{j}$

$$\vec{a}_T = (\vec{a}.\vec{u}_\upsilon).\vec{u}_\upsilon$$
$$\vec{a}_T = (a_x u_x + a_y u_y).\vec{u}_\upsilon$$
$$\vec{a}_T = [0(0,989) + (-9,8)(-0,145)](0,989\,\vec{i} - 0,145\vec{j}\,)$$
$$\vec{a}_T = (1,4\,\vec{i} - 9,6\,\vec{j}\,)\,m/s^2$$

$$\vec{a}_C = \vec{a} - \vec{a}_T$$
$$\vec{a}_C = (-9,8\,\vec{j})\ m/s^2 - (1,4\,\vec{i} - 0,2\,\vec{j}\,)\,m/s^2$$
$$\vec{a}_C = (-1,4\,\vec{i} - 9,6\,\vec{j}\,)\ m/s^2$$

6. Una partícula parte del origen con una rapidez de 10 m/s en la dirección positiva del eje de las ***y***. Su aceleración es constante e igual a $(3\vec{i} - 4\vec{j})\,m/s$. Determinar:

a) La forma de la trayectoria.
b) La posición de la partícula para cualquier tiempo t.
c) La velocidad de la partícula en t = 3 s.
d) La rapidez de la partícula en t = 3 s.

a) Como la aceleración es constante, el movimiento podría ser MRUV o parabólico. Pero como $\vec{u}_{\upsilon_o} \neq \vec{u}_a$, entonces el movimiento es parabólico.

b) $\vec{r} = \cancel{\vec{r}_o}^{\,0} + \vec{\upsilon}_o\,.t + \frac{1}{2}\,\vec{a}t^2$

$$\vec{r} = (10\,t)\,\vec{j} + \tfrac{1}{2}(3\,\vec{i} - 4\,\vec{j})\,t^2$$
$$\vec{r} = [(1,5\,t)\,\vec{i} + (10\,t - 2\,t^2)\,\vec{j}\,]\,m.$$

c) $\vec{v} = \vec{v}_\circ + \vec{a}.t$

$\vec{v} = 10\vec{j} + (3\vec{i} - 4\vec{j})\ t$

$\vec{v} = [(3t)\vec{i} + (10 - 4t)\vec{j}]$ m/s , para t = 3s

$\vec{v} = \{3(3)\vec{i} + [10 - 4(3)]\vec{j}\}$ m./s

$\vec{v} = (9\vec{i} - 2\vec{j})$m/s

d) $\vec{v} = (9\vec{i} - 2\vec{j})$ m/s

$\vec{v} = (9{,}22$ m/s ; $347{,}47^\circ)$

$v = 9{,}22$ m/s

EJERCICIO N°9

1. Desde un puente se dispara un proyectíl con una velocidad de $30\vec{i}$ m/s, si impacta en la superficie del río con un ángulo de 45°; determinar:

a) En cuánto tiempo impacta el proyectíl.

b) La altura del puente recpecto al la superficie del río.

c) La aceleración tangencial y centripeta al momento del impacto.

2. Un bombardero que vuela horizontalmente con una velocidad de 480 $\vec{i}$ km/h, a un altura de 5500m dispara a un auto que se mueve a una velocidad constante 125 $\vec{i}$ km/h, en el miso plano vertical. Para que el proyectíl impacte en el blanco; determinar?

a) El ángulo que forma la visual del avión al auto con la horizontal en el instante en el el avión debe soltar la bomba.

b) El tiempo que tarda la bomba en impactar el auto.

c) La distancia que recorre al avión desde que suelta la bomba hasta que impacta en el blanco.

3. Se lanza una pelota desde una altura de 5m con una velocidad de 12 $\vec{i}$ m/s; determinar:

a) La distancia a la que debe colocarse una persona que alzando los brazos alcanza 2.20m de altura, para cogerla.

b) El tiempo que la pelota permanece en el aire.

c) Las aceleraciones tangencial y centrípeta en el momento que la persona la recepta.

4. Desde lo alto de un edificio se lanza un objeto con una velocidad de $100\vec{i}$ m/s; determinar:

a) En qué tiempo el módulo de la aceleración tangencial es igual al módulo de la aceleración centrípeta.

b) La velocidad en ese instante.

c) La posición en ese instante respecto al punto de lanzamiento.

5. En una mesa de 0,75m de altura un objeto desliza y cae describiendo una trayectoria semi parabólica. Sabiendo que cuándo se encuentra a 0,15m de altura, la distancia hasta el borde de la mesa es 80 cm; determinar:

a) La velocidad con la que el objeto abandona la mesa.

b) El tiempo en el que llega a la posición indicada y el tiempo en que impacta en el suelo.

EJERCICIO N°9

c) La velocidad en la posición indicada y la velocidad con que choca contra el suelo.

6. Una pelota de tenis se impulsa con una raqueta de tal modo que su velocidad inicial es $56\vec{i}$ km/h desde el borde de una cancha que mide 23,77m de largo y desde una altura de 2,5m; determinar:

a) La distancia a la que rebota la primera vez respecto de la red central cuya altura es de 0,92m.

b) La velocidad minima que se le debe comunicar a la pelota para que justamente logre pasar la red.

c) La velocidad que se le debe comunicar a la pelota para que caiga justamente al borde opuesto de la cancha.

7. Un proyectil es disparado con una rapidez de 45m/s y un ángulo de 40° sobre la horizontal; determinar:

a) La velocidad del proyectil cuando forma un ángulo de 30° sobre la horizontal.

b) El desplazamiento cuándo alcanza dicho punto.

c) La altura máxima que alcanza.

d) El alcance horizontal.

8. Se impulsa una pelota desde el suelo con una rapidez de 50m/s y con un ángulo de 45° desde la horizontal; determinar:

a) La velocidad de la pelota cuándo su componente en el eje y es de $-20\vec{j}$ m/s

b) La posición de la pelota cuándo alcanza dicha velocidad.

c) La aceleración total, tangencial y centrípeta en dicho instante.

d) La altura máxima

9. Un avión que lleva una velocidad de $50\vec{i} + 60\vec{j}$ m/s deja caer una bomba; determinar:

a) La altura máxima que alcanza la bomba desde el nivel de lanzamiento.

b) El tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima

c) La altura por debajo del nivel de lanzamiento a la que la bomba tiene una velocidad de $50\vec{i} - 100\vec{j}$ m/s.

10. Un proyectil es lanzado desde una altura de 80m desde el suelo formando un ángulo de 40° sobre la horizontal, si cae al suelo a una distancia horizontal de 300m desde el punto de lanzamiento; determinar:

a) La velocidad inicial del proyectil.

b) La posición del proyectil en el punto más alto respecto al punto de lanzamiento.

c) La posición del proyectil cuándo alcanza nuevamente el nivel de lanzamiento.

d) El tiempo que demora en llegar al suelo.

11. De un cañón se dispara un proyectil con una rapidez de 200 m/s y un ángulo de 50° y luego se dispara otro con la misma rapidez y un ángulo de 30° sobre la horizontal; determinar:

a) El intervalo de tiempo con que deben realizarse los disparos para que los proyectiles choquen.

b) La altura máxima que alcanza cada proyectil respecto al cañon.

c) El alcance horizontal de cada proyectil.

d) Dónde chocan los proyectiles respecto al cañón.

12. Un proyectil con movimiento parabólico se encuentra en el punto A, donde su velocidad instantánea es de 20 m/s y forma un ángulo de 30° sobre la horizontal. Si el proyectil demoró 1,2s en llegar a A desde su lanzamiento; determinar:

a) La velocidad inicial del lanza-miento.

b) La altura máxima.

c) Las aceleraciones: total, tangen-cial y centrípeta en el punto A.

d) El ángulo de lanzamiento.

13. Un proyectil es disparado con una rapidez de 100 m/s y con un ángulo de 60° sobre la horizontal desde un punto A(-10, -2)m; determinar:

a) La velocidad en el instante en que X=0m

b) La aceleración tangencial en Y=0m por primera vez.

c) Las coordenadas del punto donde la altura es máxima.

d) La coordenada en Y cuándo X=2m

14. Desde lo alto de un edificio de 20m de altura se lanza una pelota con una velocidad de 5m/s y un ángulo de 45° sobre la horizontal; determinar:

a) A que distancia horizontal de la base del edificio impacta la pelota.

b) La altura máxima que alcanza.

c) A que distancia horizontal de la base del edificio alcanza la altura máxima.

d) La velocidad con la que llega al suelo.

15. Una persona con patines sube por una rampa de 20°, cuándo abandona la rampa, salta hasta una grada situada a 2m de distancia horizontal y 0,5m abajo del punto donde abandona la rampa; determinar:

a) La velocidad minima con la que debe abandonar la rampa para llegar justamente a la grada sin problema.

b) La máxima altura que alcanza desde el punto donde abandona la rampa.

c) Si con la misma rapidez calculada en el punto a) abandona una rampa de 15°, ¿logra alcanzar la grada sin problema?.

16. Una pelota es lanzada a 20m/s formando un ángulo de 60° con la horizontal; a 10m del punto de lanza-miento se encuentra un obstaculo de 14m de altura; determinar:

a) Si la pelota supera el obstaculo; si si no lo hace a que altura del mismo impacta.

b) La máxima altura que alcanza.

c) En qué puntos podrían colocarse dos vallas de 10m de altura, para que la pelota los pase exactamente.

17. Se lanza un balón de manera que pasa exactamente sobre dos barreras

cada una de 2m de altura que están separadas 10m. Si el tiempo que demora el balón en recorrer la distancia entre las barreras es 1s; determinar:

a) La velocidad inicial con que fue lanzado el balón.

b) La altura máxima.

c) El alcance horizontal

d) El tiempo total desde que es lanzado hasta que llega nuevamente al nivel del lanzamiento.

18. Se dispara una flecha a 20m/s y 30° sobre la horizontal, para dar en un árbol que se encuentra a 25m de distancia; determinar:

a) La altura a la que se elevará la flecha.

b) El ángulo que formarán la flecha con el árbol.

c) El tiempo que tarda la flecha hasta dar en el árbol.

19. Desde la base de una montaña cuya pendiente es 35° se lanza hacia la cima una piedra a 30m/s y 60° sobre la horizontal; determinar

a) La altura a la que impacta la piedra (desde la base de la montaña).

b) El tiempo que tarda en impactar.

c) Si el impacto sucede antes o después de que la piedra a alcanzado su altura máxima.

d) La velocidad con la que impacta la piedra.

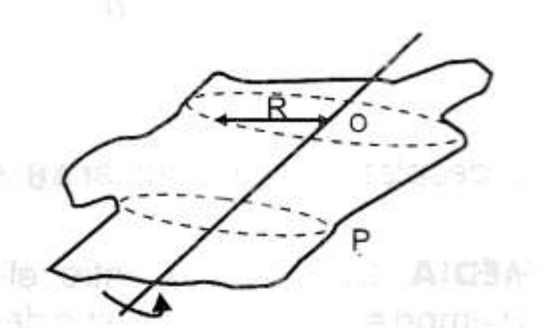
20. Desde una cancha de fútbol ubicada al pié de una colina de 30° de pendiente, se realiza un lanzamiento desde un punto ubicado a 10m de la base de la colina y hacia ella; determinar:

a) La velocidad inicial con que se debe lanzar la pelota para que impacte en la colina a una altura de 3m justo cuando llega a su altura máxima.

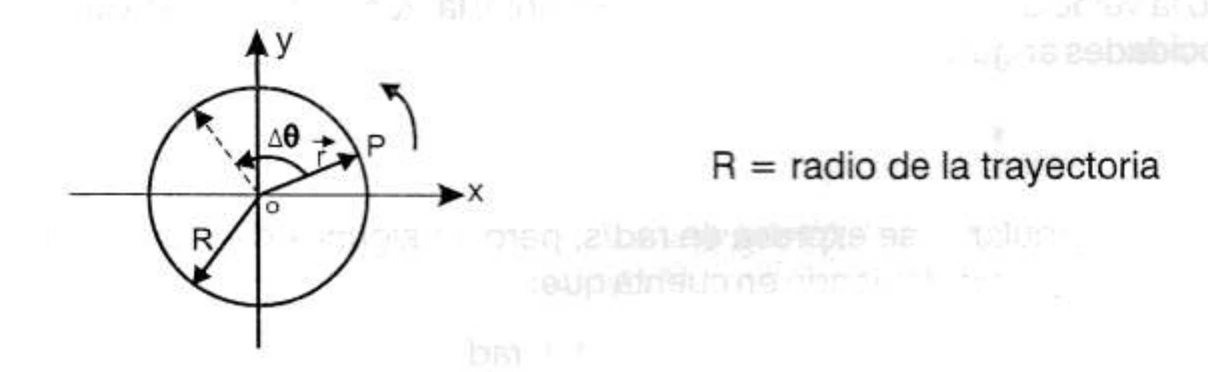
b) Dónde y cuándo impacta la pelota si la velocidad inicial es 10m/s y 30° sobre la horizontal.

c) Dónde y cuándo impacta la pelota si la velocidad inicial es 15m/s y 30° sobre la horizontal.

MOVIMIENTO CIRCULAR. Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje, sus puntos (partículas) describen trayectorias circulares en planos perpendiculares al eje. El movimiento realizado por cada una de estas partículas se denomina movimiento circular.



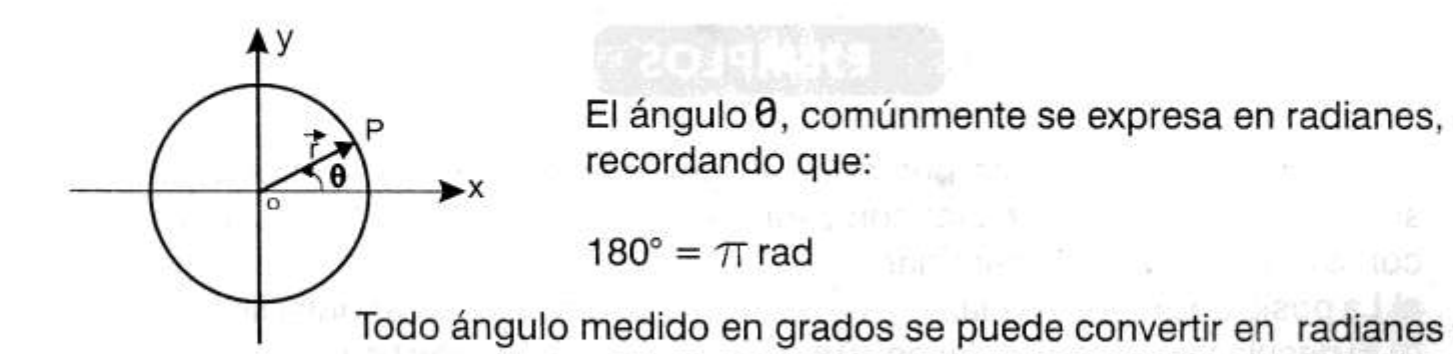
El análisis del movimiento circular se facilita si se hace coincidir el origen del sistema de referencia con el centro de la trayectoria:



R = radio de la trayectoria

Mientras la partícula P se desplaza por la trayectoria circular, su vector posición r barre ángulos centrales ($\Delta\theta$). Por esto es conveniente definir variables de tipo angular que permitan analizar el movimiento.

Posición angular. Es el ángulo θ que existe entre el vector posición de la partícula y un eje de referencia, que generalmente es **x**.



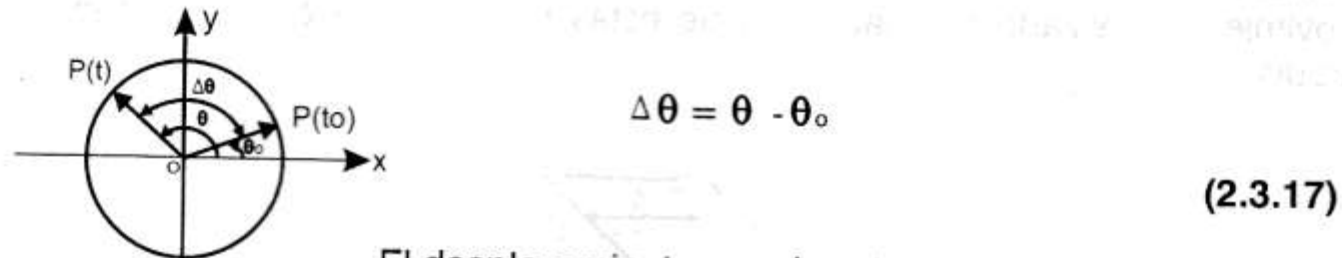
El ángulo θ, comúnmente se expresa en radianes, recordando que:

$180° = \pi$ rad

Todo ángulo medido en grados se puede convertir en radianes multiplicando el número de grados por $\pi/180$

Todo ángulo medido en radianes se puede convenir en grados multiplicando el número de radianes por $180/\pi$.

DESPLAZAMIENTO ANGULAR. Es la variación neta de la posición angular de una partícula, respecto de un sistema de referencia.



$$\Delta\theta = \theta - \theta_o \qquad (2.3.17)$$

El desplazamiento angular $\Delta\theta$ se expresa en radianes.

VELOCIDAD ANGULAR MEDIA. Es la razón entre el desplazamiento angular efectuado por la partícula y el tiempo empleado en dicho desplazamiento:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_o} \qquad (2.3.18)$$

Cuando la velocidad angular varía uniformemente, la ωm es igual a la semisuma de las velocidades angulares inicial y final:

$$\omega_m = \frac{\omega_o + \omega}{2} \qquad (2.3.19)$$

La velocidad angular se expresa en rad/s, pero en algunos casos es más cómodo utilizar **RPM** = rev/min, teniendo en cuenta que:

$$1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad}$$

ACELERACIÓN ANGULAR. Es la razón entre la variación de la velocidad angular que experimenta una partícula y el intervalo de tiempo en que se produjo:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_o}{t - t_o}$$

La aceleración angular a se expresa en $\frac{rad/s}{s} = \frac{rad}{s^2}$ (2.3.20)

EJEMPLOS

1. Una partícula parte de un punto (-3, 4) cm, moviéndose en sentido antihorario sobre una trayectoria circular con centro en el origen, con una velocidad angular constante de 4rad/s. Determinar:

   a) La posición angular inicial.

   b) El desplazamiento angular en 10 s.

   c) La posición angular final.

   d) La posición final

a) $\vec{r}_o$ = (-3,4)cm = (5 cm; 126,87°)

θ_o = 126,87°

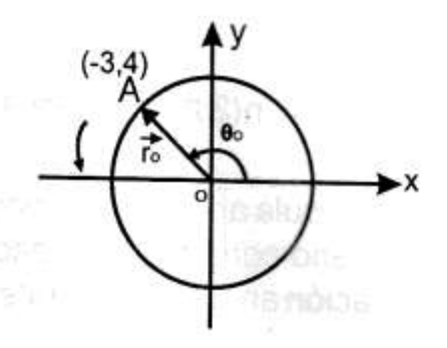
θ_o = 126,87 (π/180)rad = 2,21 rad

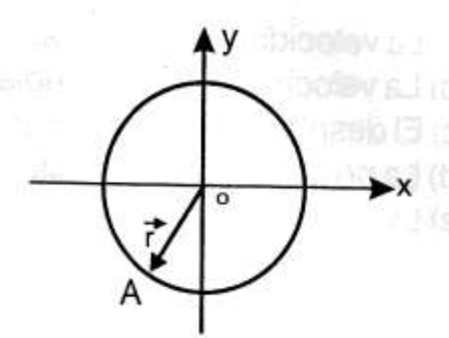
b) $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$\Delta\theta = \omega . \Delta t$
$\Delta\theta = 4 \text{ rad/s}.10\text{s}$
$\Delta\theta = 40 \text{ rad}$

c) $\Delta\theta = \theta - \theta$
$\theta = \theta_o + \Delta\theta$
$\theta = 2,21 \text{ rad} + 40 \text{ rad}$
$\theta = 42,21 \text{ rad}$

d) $\theta = 42,21\ (180/\pi)°$
$\theta = 2418,45°$
$\vec{r} = (5 \text{ cm} ; 2418,45°)$
$\vec{r} = (-1; -4,9)\text{cm}$





2. Una partícula gira por una trayectoria circular con una velocidad angular constante de 5 rad/s. Determinar:
   a) El tiempo necesario para girar un ángulo de 620°
   b) El tiempo necesario para dar 12 revoluciones.
   c) El ángulo (en grados) girado en 9 s.
   d) El número de vueltas que da en 2 minutos.

a) $\Delta\theta = 620° = 620(\pi/180)\text{rad} = 10,82 \text{ rad}$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{10,82 \text{ rad}}{5 \text{ rad/s}} = 2,16 \text{ s}$$

b) $n = 12 \text{ rev}$
$\Delta\theta = n(2\pi)\text{rad}$
$\Delta\theta = 12(2\pi)\text{rad}$
$\Delta\theta = 75,4 \text{ rad}$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{75,4 \text{ rad}}{5 \text{ rad/s}} = 15,08 \text{ s}$$

c) $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$\Delta\theta = \omega . \Delta t$
$\Delta\theta = 5 \text{ rad/s}.9\text{s}$
$\Delta\theta = 45 \text{ rad}$

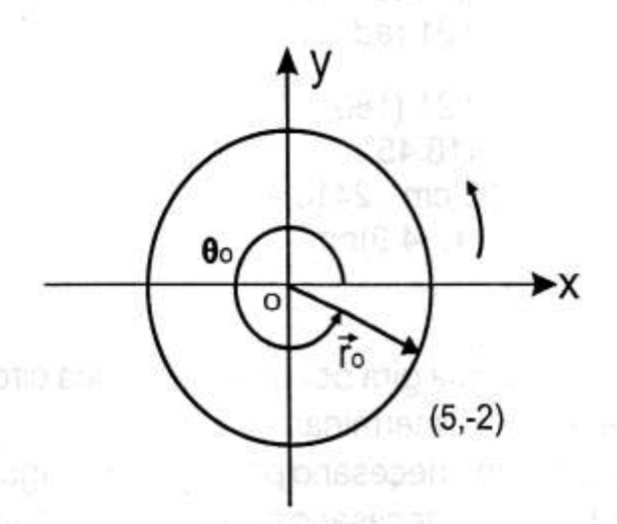
$\Delta\theta = 45 \text{ rad}$
$\Delta\theta = 45\ (180/\pi)°$
$\Delta\theta = 2578,31°$

d) $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow$
$\Delta\theta = \omega . \Delta t$
$\Delta\theta = 5 \text{ rad/s}.120\text{s}$
$\Delta\theta = 600 \text{ rad}$

$$\Delta\theta = n(2\pi)\text{rad} \Rightarrow n = \frac{\Delta\theta}{2\pi\text{rad}} = \frac{600 \text{ ràd}}{2\pi\text{rad}} = 95{,}49 \text{ rev}$$

3. Una partícula animada de movimiento circular parte del punto (5, -2) cm en sentido antihorario con una velocidad angular de 4 rad/s y se mueve durante 5 s con una aceleración angular constante de 1 rad/s . Determinar:

a) La velocidad angular final
b) La velocidad angular media.
c) El desplazamiento angular.
d) La posición angular inicial.
e) La posición final.



a)
$$\omega = \omega_o + \alpha.\Delta t$$
$$\omega = 4 \text{ rad/s} + 1 \text{ rad/s}^2 .5\text{s}$$
$$\omega = 4 \text{ rad/s} + 5 \text{ rad/s}$$
$$\omega = 9 \text{ rad/s}$$

b)
$$\omega_m = \frac{\omega_o + \omega}{2} = \frac{4 \text{ rad/ s} + 9 \text{ rad/s}}{2} = 6{,}5 \text{ rad/s}$$

c)
$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

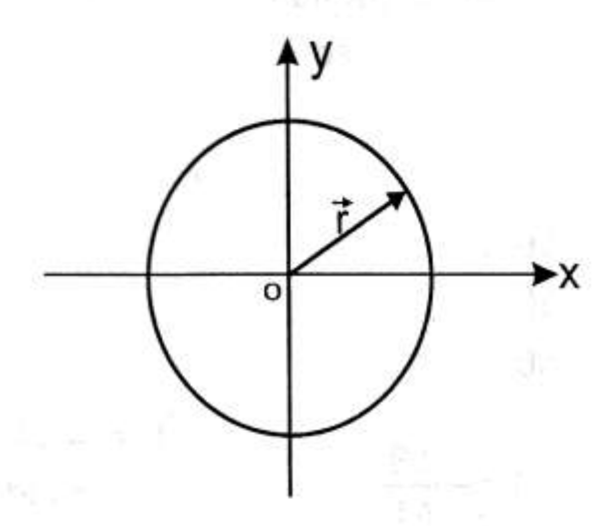
$$\Delta\theta = \omega_m .\Delta t$$
$$\Delta\theta = 65 \text{ rad/s. } 5\text{s}$$
$$\Delta\theta = 32{,}5 \text{ rad}$$

d)
$$\vec{r}_o = (5 , -2)\text{cm}$$
$$\vec{r}_o = (5{,}39 \text{ cm}; 338{,}20°)$$

$$\theta_o = 338{,}20°$$
$$\theta_o = 338{,}20 (\pi/180)\text{rad}$$
$$\theta_o = 5{,}9 \text{ rad}$$

e)
$$\Delta\theta = \theta - \theta_o$$
$$\theta = \theta_o + \Delta\theta$$
$$\theta = 5{,}9 \text{ rad} + 32{,}5 \text{ rad}$$
$$\theta = 38{,}4 \text{ rad}$$
$$\theta = 38{,}4(180/\pi)°$$
$$\theta = 2200{,}16°$$

$$\vec{r} = (5{,}39 \text{ cm} ; 2200{,}16°)$$
$$\vec{r} = (4{,}12 ; 3{,}48)\text{cm}$$



EJERCICIO Nº 10

1. Una partícula animada de movimiento circular parte del punto (3, 5)cm y gira antihorariamente, con centro en el origen, 1000° en 12 s. Determinar:
a) El desplazamiento angular.
b) La velocidad angular media.
c) La posición angular inicial.
d) La posición final.

2. Calcular la velocidad angular de cada una de las tres manecillas de un reloj.

3. El radio de una rueda de bicicleta gira con una velocidad angular de 0,7 rad/s durante 4 minutos. Determinar:
a) El ángulo descrito en grados.
b) Cúantas vueltas ha dado.

4. Una partícula gira por una trayectoria circular con una velocidad angular constante de 8rad/s. Determinar:
a) El tiempo necesario para girar un ángulo de 1000°
b) El tiempo necesario para dar una revolución.
c) El ángulo girado en un minuto.
d) El número de revoluciones que da por minuto.

5. Una partícula que gira por una trayectoria circular da 25 vueltas en 6 s. Determinar:
a) La velocidad angular media.
b) El ángulo girado en 3 s.
c) El tiempo necesario para girar un ángulo de 1600°

6. Una partícula parte del punto (-5, -6)cm y gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de 18 rad/s. Si el centro de la trayectoria es el origen, determinar:
a) La posición angular inicial.
b) El desplazamiento angular en 4 s.
c) La posición angular final.
d) La posición final.

7. La velocidad angular de un motor cambia uniformemente de 1200 a 2100 RPM en 5 s. Determinar:
a) La aceleración angular.
b) La velocidad angular media.
c) El desplazamiento angular.

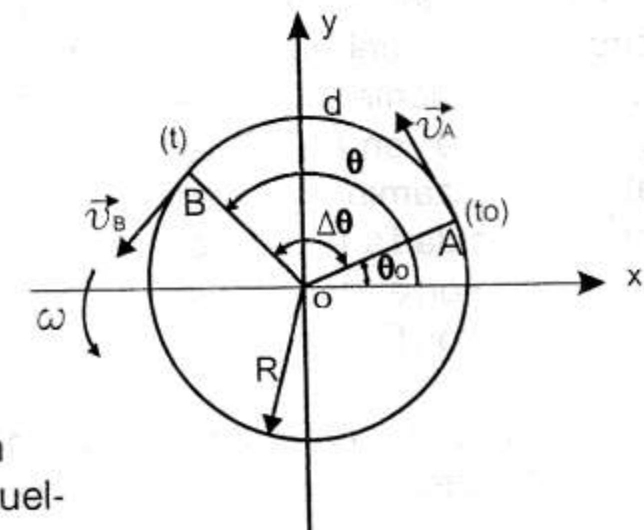
8. Un cuerpo parte del punto (4; 7)cm en sentido antihorario por una trayectoria circular y gira un ángulo de 120 rad en 8 seg, alcanzando una velocidad angular de 25 rad/s. Si el centro de la trayectoria es el origen, determinar:
a) La velocidad angular media.
b) La velocidad angular inicial.
c) La posición angular final.
d) La aceleración angular.

9. Un cuerpo parte del punto (3; -6) cm en sentido antihorario por una pista circular con centro en el origen, con una velocidad angular de 6 rad/s y se mueve durante 10s con una aceleración angular de 2 rad/s^2
Determinar:
a) La velocidad angular final.
b) La velocidad angular media.
c) El desplazamiento angular.
d) La posición final.

10. Desde un mismo punto de la circunferencia parten dos móviles en sentido opuesto. El primero recorre la circunferencia en 1h45min y el segundo recorre un ángulo de 10°30' en un minuto.
Determinar dónde y cuándo se encuentran.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME(MCU). Es el de una partícula cuya velocidad angular (ω) es constante,

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{cte.}$$



El desplazamiento angular es: $\Delta\theta = \omega.\Delta t$

La posición angular final es : $\theta = \theta_o + \omega.\Delta t$

En el MCU la partícula recorre arcos iguales en tiempos iguales, lo que significa que todas las vueltas serán recorridas en tiempos iguales

· ***Período (T)***. Es el tiempo empleado en recorrer una vuelta completa.

Si $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ y $\Delta\theta = 2\pi \text{rad}$, entonces:

$$T = \frac{2\pi \text{rad}}{\omega} \qquad \textbf{(2.3.21)}$$

El período se expresa en unidades de tiempo, generalmente en segundos.

· ***Frecuencia (f)***: Es el número de revoluciones por unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \textbf{(2.3.22)}$$

La frecuencia se expresa en s^{-1} o hertz.

· ***La distancia (d)*** que recorre una partícula en MCU es la longitud de un arco que se determina por:

$$d = \Delta\theta.\, R, \text{ siempre que } \Delta\theta \text{ se mida en radianes} \qquad \textbf{(2.3.23)}$$

Dividiendo la ecuación anterior por Δt, tenemos:

$$\frac{d}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} R, \text{ donde } \frac{d}{\Delta t} = \upsilon \text{ por (2.1.5) y } \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \text{ por (2.3.18)}$$

$\upsilon = \omega\, .\, R$, reemplazando ω por (2.3.21), tenemos: **(2.3.24)**

$$v = \frac{2\pi R}{T} \qquad (2.3.25)$$

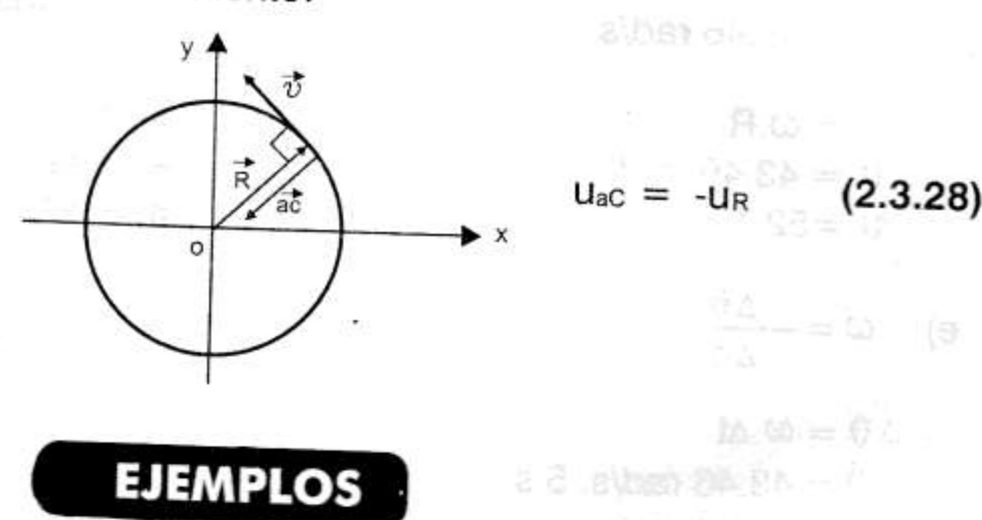
Como en el MCU la velocidad angular (ω) es constante, también la rapidez v (módulo de la velocidad) es constante, lo que hace que no se genere una aceleración tangencial. Pero la variación continua de la velocidad en dirección, genera una aceleración centrípeta o normal, que es igual a la aceleración total:

$$\vec{a} = \vec{a}_T^{\,0} + \vec{a}_C$$
$$\vec{a} = \vec{a}_C \qquad (2.3.26)$$

El módulo de esta aceleración es constante e igual a:

$$a_C = a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega v \qquad (2.3.27)$$

La dirección de la aceleración es hacia el centro de la trayectoria, opuesta a la del radio y perpendicular a la velocidad del movimiento:



$$u_{aC} = -u_R \qquad (2.3.28)$$

EJEMPLOS

1. Una partícula que se mueve por una trayectoria circular de 1,6 m de radio, gira un ángulo de 125° cada 7 segundos. Determinar:

a) La velocidad angular de la partícula.
b) La rapidez de la partícula.
c) El período.
d) La frecuencia.
e) El módulo de la aceleración centrípeta.

a) $\Delta\theta = 125°$
$\Delta\theta = 125(\pi/180)\text{rad}$
$\Delta\theta = 2{,}18 \text{ rad}$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2{,}18 \text{ rad}}{7 \text{ s}} = 0{,}31 \text{ rad/s}$$

b) $v = \omega.R$
$v = 0{,}31 \text{ rad/s}.1.6\text{m}$
$v = 0{,}50 \text{ m/s}$

c) $$T = \frac{2\pi \text{ rad}}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{0{,}31 \text{ rad/s}} = 20{,}27 \text{ s}$$

d) $f = \dfrac{1}{T}$

$f = \dfrac{1}{20{,}27\ s} = 0{,}049\ s^{-1}$

e) $a_C = \dfrac{v^2}{R}$

$a_C = \dfrac{(0{,}5 m/s)^2}{1{,}6 m} = 0{,}16\ m/s^2$

2. Una partícula da 415 RPM en una circunferencia de 1,2 m de radio. Determinar:
   a) Su velocidad angular.
   b) Su período.
   c) La rapidez de la partícula.
   d) El módulo de la aceleración centrípeta.
   e) La distancia recorrida en 5 s.

a) $\omega = 415$ RPM

$\omega = \dfrac{415\ 2\pi\ rad}{60\ s}$

$\omega = 43{,}46$ rad/s

b) $T = \dfrac{2\pi\ rad}{\omega}$

$T = \dfrac{2\pi\ rad}{43{,}46\ rad/s} = 0{,}14\ s$

c) $v = \omega.R$

$v = 43{,}46$ rad/s.1,2m

$v = 52{,}15$ m/s

d) $a_C = \omega^2.R$

$a_C = (43{,}46\ rad/s)^2 1{,}2m$

$a_C = 2266{,}53\ m/s^2$

e) $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$\Delta\theta = \omega.\Delta t$

$\Delta\theta = 43{,}46$ rad/s. 5 s

$\Delta\theta = 217{,}3$ rad

$d = \Delta\theta.R$

$d = 217{,}3$ rad.1,2 m

$d = 260{,}76$ m

3. Un cuerpo parte del punto (-2, 6) m y gira en sentido antihorario a 500 RPM durante 4 s. Si el centro de la circunferencia está en el origen, determinar:
   a) La velocidad angular.
   b) La posición angular inicial.
   c) La posición angular final.
   d) La posición final.
   e) Cuántas vueltas da en los 4 s.
   f) El período.
   g) La velocidad en la posición inicial.
   h) La aceleración centrípeta en la posición final.

a) $\omega = 500$ RPM

$\omega = 500 \left[\dfrac{2\pi\ rad}{60\ s}\right] = 52{,}36$ rad/s.

b) $\vec{r}_o = (-2, 6)$ m

$\vec{r}_o = (6{,}32\text{ m}; 108{,}43°)$

$\theta_o = 108{,}43°$

$\theta_o = 108{,}43\ (\pi/180)$ rad

$_o = 1{,}89$ rad

c) $\theta = \theta_o + \omega.\Delta t$

$\theta = 1{,}89\text{ rad} + 52{,}36\text{ rad/s}.4\text{s}$

$\theta = 1{,}89\text{ rad} + 209{,}44\text{ rad}$

$\theta = 211{,}33$ rad

d) $\theta = 211{,}33$ rad

$\theta = 211{,}33\text{ rad}(180/\pi)°$

$\theta = 12108{,}32°$

$\vec{r} = (6{,}32\text{ m}; 12108{,}32°)$

$\vec{r} = (-4{,}2; -4{,}72)$m

e) $n = \dfrac{\Delta\theta}{2\pi\text{ rad}}$

$n = \dfrac{209{,}44\text{ rad}}{2\pi\text{ rad}}$

$n = 33{,}33$ rev

f) $T = \dfrac{2\pi\text{ rad}}{\omega} = \dfrac{2\pi\text{ rad}}{52{,}36\text{ rad/s}} = 0{,}12$ s

g) $v = \omega.R$

$v = 52{,}36\text{ rad/s}\ .6{,}32\text{m}$

$v = 330{,}92$m/s

$\vec{v} = (330{,}92\text{m/s}; 198{,}43°)$

$\vec{v} = (-313{,}95\vec{i} - 104{,}62\vec{j})$m/s

$\beta = 108{,}43° - 90°$

$\beta = 18{,}43°$

$\phi = 180° + 18{,}43°$

$\phi = 198{,}43°$

h) $a_C = \omega^2.R$

$a_C = (52{,}36\text{ rad/s})^2 6{,}32\text{m}$

$a_C = 17326{,}72\text{m/s}^2$

$\vec{a}_C = a_C(-\vec{u}_r)$

$\vec{a}_C = 17326{,}72\text{m/s}^2(0{,}665\vec{i} + 0{,}747\vec{j})$

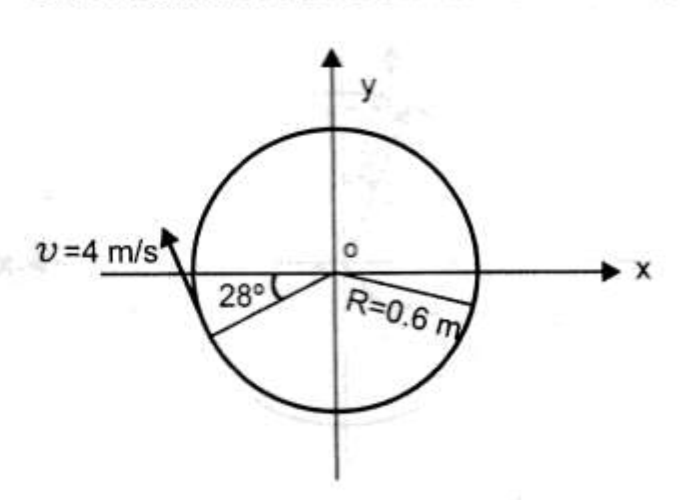
$\vec{a}_C = (11522{,}27\vec{i} + 12943{,}06\vec{j})\text{m/s}^2$

$\vec{r} = (-4{,}2; -4{,}72)$m

$\vec{r} = (-4{,}2\vec{i}; -4{,}72\vec{j})$m

$\vec{u}_r = -0{,}665\vec{i} - 0{,}747\vec{j}$

4. Una partícula animada de MCU se encuentra en la posición que indica la figura en t = 3s. Si se mueve en sentido horario 7 s, determinar:



a) La velocidad angular.
b) El desplazamiento angular.
c) Cuántas vueltas da en los 7 s.
d) La distancia recorrida.
e) La posición final.
f) El período.
g) La velocidad en t = 10 s.
h) La aceleración centrípeta en t = 3 s.

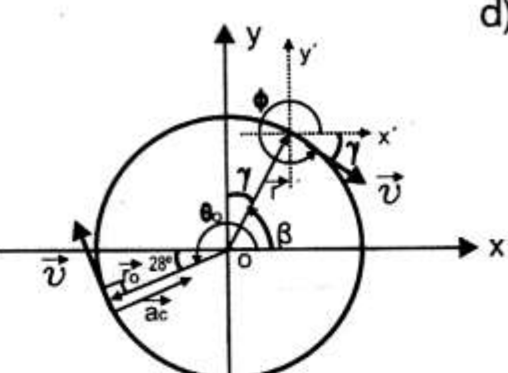
a) $v = \omega . R \implies \omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{4 m/s}{0,6\ m} = 6,67\ rad/s$

b) $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} \implies \Delta\theta = \omega . \Delta t = 6,67\ rad/s .\ 7s = 46,69\ rad$

c) $n = \dfrac{\Delta\theta}{2\pi\ rad}$

$n = \dfrac{46,69\ rad}{2\pi\ rad}$

$n = 7,43\ rev$



d) $d = \Delta\theta . R$

$d = 46,69\ rad . 0,6m$

$d = 28,01\ m$

e) $n = 7,43\ rev$

transformamos 0,43 rev a grados:

$0,43(-360°) = -154,8°$ por girar en sentido horario

$\beta = 208° - 154,8°$

$\beta = 53,2°$

$\vec{r} = (0,6m; 53,20°)$

$\vec{r} = (0,36; 0,48)m$

f) $T = \dfrac{2\pi\ rad}{\omega}$

$T = \dfrac{2\pi\ rad}{6,67 rad/s}$

$T = 0,94\ s$

g) $\gamma = 90° - \beta$

$\gamma = 90° - 53,2°$

$\gamma = 36,8°$

$\phi = 360° - \gamma$

$\phi = 360° - 36,8°$

$\phi = 323,2°$

$\vec{v} = (4m/s ; 323,2°)$

$\vec{v} = (3,2\vec{i} - 2,4\vec{j})m/s$

h) $a_C = \omega^2 . R$

$a_C = (6,67\ rad/s)^2 . 0,6m$

$a_C = 26,69 m/s^2$

$\vec{a}_C = a_C(-\vec{u}_r)$

$\vec{a}_C = 26,68 m/s^2 (0,883\vec{i} + 0,467\vec{j})$

$\vec{a}_C = (23,56\vec{i} + 12,49\vec{j}) m/s^2$

$\vec{r}_o = (0,6m; 208°)$

$\vec{r}_o = (-0,53\vec{i}; -0,28\vec{j})m$

$\vec{u}_{r_o} = -0,883\vec{i} - 0,467\vec{j}$

EJERCICIO Nº 11

1. Un volante cuyo diámetro es de 1,5 m está girando a 200 RPM, Determinar:

a) La velocidad angular.
b) El período.
c) La frecuencia.
d) La rapidez de un punto del borde.
e) El módulo de la aceleración centrípeta.

2. Un cuerpo que gira con MCU está provisto de una velocidad angular de 2rad/s. Determinar:

a) El ángulo girado en 4 s.
b) El número de vueltas que da en 4 s.
c) El tiempo necesario para girar un ángulo de 500°
d) El período.
e) La frecuencia.

3. Las manecillas de un reloj miden: el horero = 4 cm, minutero = 7 cm y segundero = 10 cm. Para cada una, determinar:
a) El período.
b) La frecuencia.
c) La velocidad angular.
d) La rapidez del extremo.
e) El módulo de la aceleración centrípeta del extremo.

4. Un cuerpo gira en una trayectoria circular de 70 cm de radio y da 750 rev cada 2,5 minutos. Determinar:

a) La velocidad angular.
b) La distancia recorrida.
c) La rapidez del cuerpo.
e) El módulo de la aceleración centrípeta.

5. Un móvil se mueve en una circunferencia de 1,2 m de radio con una velocidad angular constante de 22 rad/s durante 6 s. Determinar:

a) El desplazamiento angular.
b) La distancia recorrida.
c) El período.
d) La rapidez del móvil.
e) El módulo de la aceleración centrípeta.

6. Una rueda de bicicleta tiene 60 cm de diámetro y recorre una distancia de 12 m en 15 s. Determinar:

a) El ángulo girado.
b) El número de vueltas que dio.
c) La velocidad angular.
d) El período.
e) El módulo de la aceleración centrípeta.

EJERCICIO Nº 11

7. La Tierra, cuyo radio aproximado tiene 6375 km, gira sobre su propio eje (rotación). Determinar:

a) El período de rotación.
b) La frecuencia.
c) La velocidad angular.
d) La rapidez de un punto del ecuador en km/h.
e) El módulo de la aceleración centrípeta.

8. El radio de la órbita seguida por la Tierra en su movimiento alrededor del Sol (traslación), mide $1{,}49 \times 10^{11}$ m. Determinar:

a) El período de revolución.
b) La frecuencia.
c) La velocidad angular.
d) La rapidez en km/h.
e) El módulo de la aceleración centrípeta

9. La Luna orbita alrededor de nuestro planeta; la distancia promedio que la separa de la Tierra es de $3{,}84 \times 10^{8}$ m. Determinar:

a) El período de revolución.
b) La frecuencia.
c) La velocidad angular.
d) La rapidez en km/h.
e) El módulo de la aceleración centrípeta.

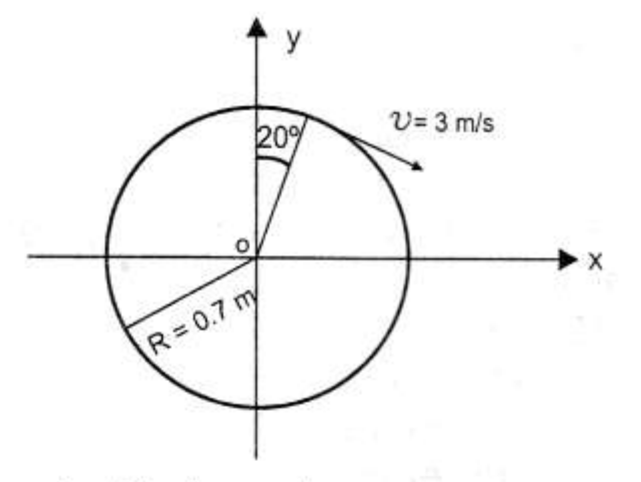
10. El Sol efectúa un movimiento de traslación a través de la Vía Láctea; el radio de la órbita es $2{,}4 \times 10^{20}$ m y su período de revolución es de $6{,}3 \times 10^{15}$ s. Determinar:

a) La frecuencia.
b) La distancia recorrida en 50 años.
c) La velocidad angular.
d) La rapidez en km/h.
e) El módulo de la aceleración centrípeta.

11. Una partícula animada de MCU parte del punto (2,7)m y gira alrededor del origen en sentido antihorario describiendo un ángulo de 215° en 6 s. Determinar:

a) La velocidad angular.
b) La posición angular inicial
c) La posición angular final.
d) La posición final.
e) El período.
f) La frecuencia.
g) La velocidad en la posición final.
h) La aceleración centrípeta en la posición inicial.

12. Un cuerpo animado de MCU se encuentra en la posición que indica la figura en t = 2s. Si se mueve en sentido horario 6 s, determinar:



a) La velocidad angular.
b) El desplazamiento angular.
c) Cuántas vueltas da.
d) La distancia recorrida.

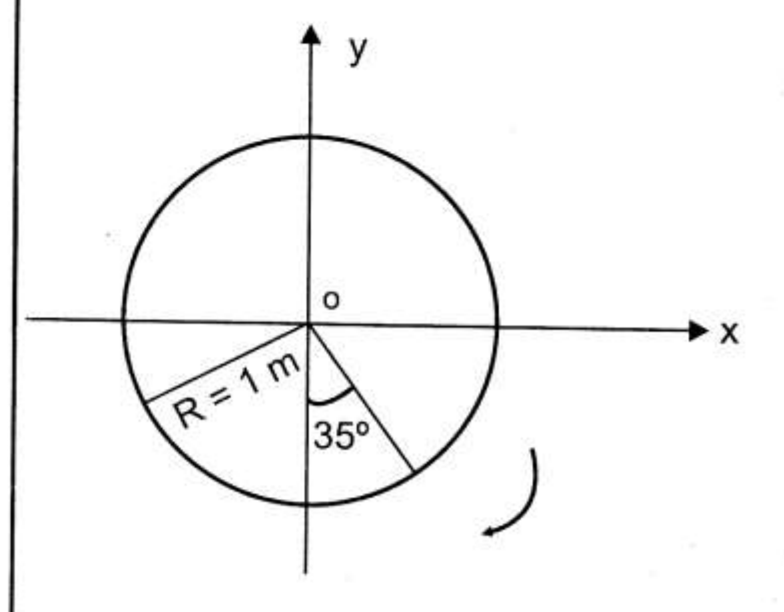
EJERCICIO Nº 11

e) La posición final.
f) El período.
g) La velocidad en t = 2 s.
h) La aceleración centrípeta en t = 8 s.

13. Un cuerpo parte del punto (4, -3)m en sentido antihorario por una trayectoria circular con centro en el origen y se mueve 12 s con una velocidad angular constante de 3 rad/s. Determinar:

a) El desplazamiento angular.
b) La posición angular inicial.
c) La posición angular final.
d) La posición final.
e) Cuántas vueltas da.
f) El período.
g) La velocidad en la posición inicial.
h) La aceleración centrípeta en la posición final.

14. Una partícula animada de MCU se encuentra en la posición que indica la figura en t = 4 s. Si gira en sentido horario con una velocidad angular de 5rad/s durante 10 s, determinar:



a) El desplazamiento angular.
b) La posición angular inicial.
c) La posición angular final.
d) La posición final.
e) Cuántas vueltas da.
f) El período.
g) La velocidad en t = 14 s.
h) La aceleración centrípeta en t = 4 s.

15. Una partícula parte del punto (-4, l)m en sentido horario con MCU. Si gira con una rapidez de 2m/s durante 15 s. Determinar:

a) La velocidad angular.
b) El período.
c) La posición angular inicial.
d) La posición angular final.
e) La posición final.
f) Cuántas vueltas da.
g) La velocidad en la posición inicial.
h) La aceleración centrípeta en la posición final.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO (MCUV). Es el de una partícula cuya aceleración angular es constante:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{cte, de } \mathbf{(2.3.20)}$$

$$\Delta\omega = \alpha.\Delta t$$

$$\omega - \omega_o = \alpha.\Delta t$$

$$\omega = \omega_o + \alpha.\Delta t \qquad \mathbf{(2.3.29)}$$

Si igualamos **(2.3.18)** con **(2.3.19)**:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\omega_o + \omega}{2}$$

$$\Delta\theta = \frac{\omega_o.\Delta t + \omega\Delta t}{2}$$; reemplazando ω por **(2.3.29)** tenemos:

$$\Delta\theta = \frac{\omega_o.\Delta t + (\omega_o + \alpha.\Delta t)\Delta t}{2}$$

$$\Delta\theta = \frac{2\omega_o.\Delta t + \alpha\,\Delta t^2}{2} = \omega_o.\Delta t + \tfrac{1}{2}\alpha.\Delta t^2 \qquad \mathbf{(2.3.30)}$$

Si igualamos nuevamente (2.3.18) con (2.3.19):

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\omega_o + \omega}{2}$$

$$\Delta\theta = \left[\frac{\omega_o + \omega}{2}\right].\Delta t$$;reemplazando Δt por (2.3.30)

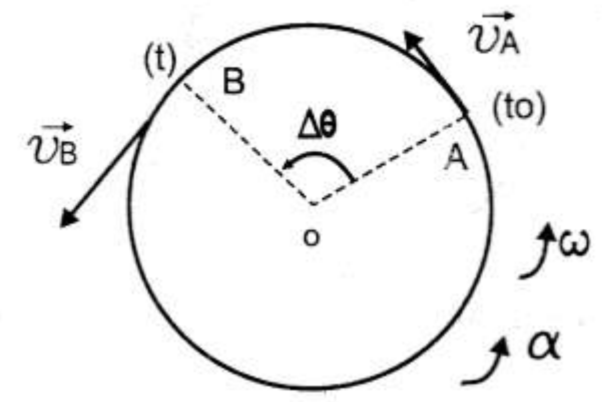
$$\Delta\theta = \frac{\omega_o + \omega}{2} \cdot \frac{\omega - \omega_o}{\alpha}$$

$$\Delta\theta = \frac{\omega^2 + \omega_o^2}{2\alpha}$$

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha.\Delta\theta \qquad \mathbf{(2.3.31)}$$

En estas ecuaciones, si el movimiento es acelerado, ω y α tienen signos iguales (igual sentido de giro). Si el movimiento es retardado, ω y α tienen signos opuestos.

En el MCUV, el vector velocidad varía simultáneamente en módulo, dirección y sentido. Por consiguiente, la aceleración tendrá las componentes tangencial y centrípeta (normal):



En cualquier instante:

a) El módulo de la aceleración tangencial es:

$v = \omega.R$ determinado por **(2.3.24)**
pero como ω varía, entonces la rapidez v también varía:

$\Delta v = \Delta\omega.R$ dividiendo por Δt se obtiene:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}.R \text{ ; donde } \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_T$$ por **(2.1.7)** y

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \alpha$$ por **(2.3.20)**

$$a_T = \alpha \,.\, R \qquad \textbf{(2.3.32)}$$

Cuando el movimiento es acelerado, .la aceleración tangencial tiene igual dirección y sentido que la velocidad ($\vec{u}_{aT} = \vec{u}_v$). Si el movimiento es retardado, tiene la misma dirección, pero sentido contrario ($\vec{u}_{aT} = -\vec{u}_v$).

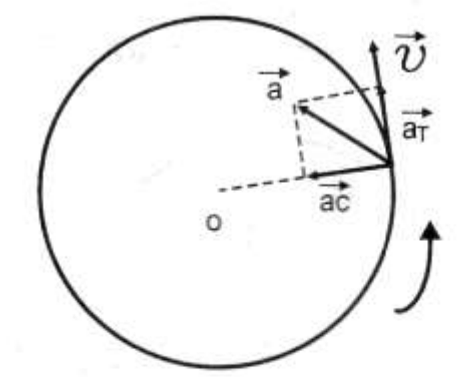
b) Módulo de la aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 . R = \omega . v$$, determinando por **(2.3.27)**

Dirección de la aceleración centrípeta:

$\vec{u}_{ac} = -\vec{u}_r$, por **(2.3.28)**

De este análisis concluimos que si la aceleración angular a es constante, también lo será el módulo de la aceleración tangencial a_T , pero no la aceleración centrípeta a . Por tanto, la aceleración total varía continuamente en módulo y dirección.



La aceleración total es igual a la suma vectorial de sus componentes de acuerdo con **(2.1.10):**

$$\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_C}$$

La aceleración centrípeta es perpendicular a la aceleración tangencial, y la magnitud de la aceleración total es:

$$a^2 = a_T^2 + a_C^2$$

Existe una semejanza entre los movimientos rectilíneos y circulares.

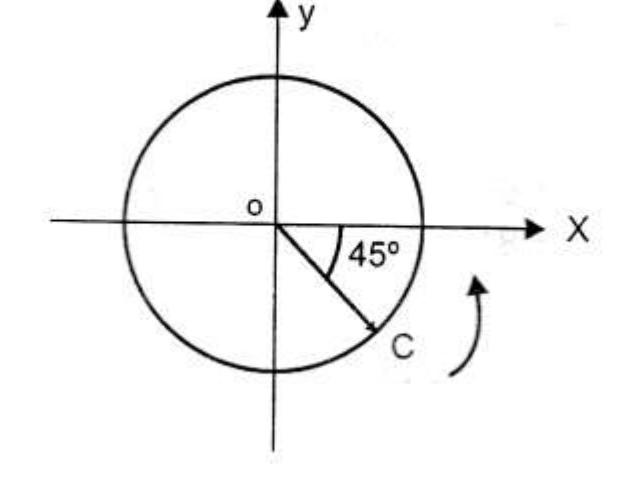
El siguiente cuadro nos permite observar dicha semejanza que se obtiene correlacionando:

$$r \Rightarrow \theta, \quad v \Rightarrow \omega \text{ y } a \Rightarrow \alpha$$

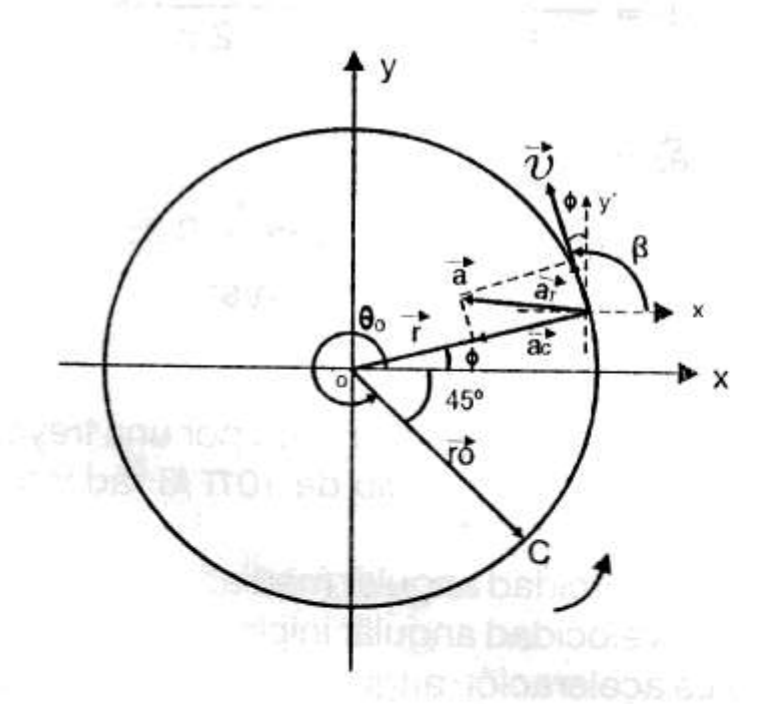
MOVIMIENTO	UNIFORME	UNIFORMEMENTE VARIADO
Movimiento Rectilíneo	$v = cte$ $r_o = r + v.\Delta t$	$a = cte$ $v = v_o + a\,.\Delta t$ $r = r_o + v_o.\Delta t + ½\, a\,.\Delta t^2$ $v^2 = v_o^2 + 2a\,.\Delta r$ $v_m = \dfrac{v_o + v}{2}$
Movimiento Circular	$\omega = cte$ $\theta = \theta_o + \omega.\Delta t$	$\alpha = cte$ $\omega = \omega_o + \alpha\,.\Delta t$ $\theta = \theta_o + \omega_o.\Delta t + ½\, \alpha.\Delta t^2$ $\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha.\Delta\theta$ $\omega_m = \dfrac{\omega_o + \omega}{2}$

EJEMPLOS

1. Una partícula parte del reposo desde el punto C en sentido antihorario con una aceleración tangencial constante de 3 m/s^2 y gira un ángulo de $(13\pi/3)$ rad en una trayectoria circular de 2 m de radio. Determinar:



a) La aceleración angular.
b) La velocidad angular final.
c) El tiempo empleado.
d) La posición angular final.
e) La posición final.
f) La velocidad final.
g) La aceleración total fina



a) $a_T = \alpha \cdot R$

$\alpha = \dfrac{a_T}{R}$

$\alpha = \dfrac{3\ m/s^2}{2\ m}$

$\alpha = 1{,}5\ rad/s^2$

b) $\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha \cdot \Delta\theta$ (con $\omega_o = 0$)

$\omega^2 = 2\ (1{,}5\ rad/s^2)(13\pi/\ 3\ rad)$

$\omega = 6{,}39\ rad/s$

c) $\omega = \omega_o + \alpha \cdot \Delta t \implies \Delta t = \dfrac{\omega}{\alpha} = \dfrac{3{,}39\ rad/s}{1{,}5\ rad/s^2} = 4{,}26\ s$ (con $\omega_o = 0$)

d) $\Delta\theta = \theta - \theta_o$

$\theta = \theta_o + \Delta\theta$

$\theta = 315° + 13\,\pi/3\ rad$

$\theta = 5{,}5\ rad + 13{,}61\ rad$

$\theta = 19{,}11\ rad$

$\theta = 1094{,}92°$

e) $\vec{r} = (\ 2m;\ 1094{,}92°)$

$\vec{r} = (\ 1{,}93\,\vec{i} + 0{,}51\,\vec{j}\ )m$

f) $\vec{r} = (\ 1{,}93\ i + 0{,}51\ j\ )m$

$\vec{r} = (\ 2m;\ 14{,}92°)$

$\phi = 14{,}92°$

$\beta = 90° + 14{,}92°$

$\beta = 104{,}92°$

$v = \omega \cdot R$

$v = 6{,}39\ rad/s \cdot 2m$

$v = 12{,}78\ m/s$

$\vec{v} = (\ v\,;\beta\ )$

$\vec{v} = (12{,}78\ m/s;\ 104{,}92°\ )$

$\vec{v} = (-3{,}29\,\vec{i} + 12{,}35\,\vec{j}\ )m/s$

g) $\vec{u}_v = \dfrac{\vec{v}}{v} = \dfrac{(-3{,}29\,\vec{i} + 12{,}35\,\vec{j})\ m/s}{12{,}78\ m/s} = -0{,}257\,\vec{i} + 0{,}966\,\vec{j}$

$\vec{a}_T = a_T(\vec{u}_v)$

$\vec{a}_T = 3\ m/s^2\,(-0{,}257\,\vec{i} + 0{,}966\,\vec{j})$

$\vec{a}_T = (-0{,}77\,\vec{i} + 2{,}9\,\vec{j})m/s^2$

$a_c = \omega . v$

$a_c = 6{,}39\ rad/s . 12{,}78\ m/s$

$a_c = 81{,}66\ m/s^2$

$\vec{u}_r = \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{(1{,}93\,\vec{i} + 0{,}51\,\vec{j})\ m/s}{2m} = 0{,}965\,\vec{i} + 0{,}26\,\vec{j}$

$\vec{a}_c = a_c\,(-\vec{u}_r)$

$\vec{a}_c = 81{,}66\ m/s^2\,(-0{,}965\,\vec{i} - 0{,}26\,\vec{j})$

$\vec{a}_c = (-78{,}8\,\vec{i} - 21{,}23\,\vec{j})m/s^2$

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c$

$\vec{a} = [(-0{,}77\,\vec{i} + 2{,}9\,\vec{j}) + (-78{,}8\,\vec{i} - 21{,}23\,\vec{j})]m/s^2$

$\vec{a} = (-79{,}57\,\vec{i} - 18{,}33\,\vec{j})m/s^2$

$\vec{a} = (81{,}65\ m/s^2;\ 192{,}97°)$

2. Un cuerpo que está girando por una trayectoria circular de 0,75 m de radio, demora 3 s en girar un ángulo de $10\pi/3$ rad y alcanza una velocidad angular de 50 RPM. Determinar:

a) La velocidad angular media.
b) La velocidad angular inicial.
c) La aceleración angular.
d) La rapidez inicial.
e) La rapidez final.
f) La distancia recorrida.
g) El módulo de la aceleración total final.

a) $\omega_m = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{10\pi/3\ rad}{3\ s} = \dfrac{10{,}47\ rad}{3\ s} = 3{,}49\ rad/s$

b) $\omega = 50\ RPM$

$\omega = 50\left[\dfrac{2\pi\ rad}{60\ s}\right]$

$\omega = 5{,}24\ rad/s$

$\omega_m = \dfrac{\omega_o + \omega}{2}$

$\omega_o = 2\omega_m - \omega$

$\omega_o = 2\ (3{,}49\ rad/s) - 5{,}24\ rad/s^2$

$\omega_o = 1{,}74\ rad/s$

c) $\alpha = \dfrac{\omega - \omega_o}{\Delta t} = \dfrac{5{,}24\ rad/s - 1{,}74\ rad/s}{3\ s} = 1{,}17\ rad/s$

d) $v_o = \omega_o . R$

$v_o = 1{,}74\ rad/.0{,}75m$

$v_o = 1{,}31 m/s$

e) $v = \omega . R$

$v = 5{,}24\ rad/s . 0{,}75m$

$v = 3{,}93\ m/s$

f) $d = \Delta\theta . R$

$d = 10{,}47\ rad . 0{,}75m$

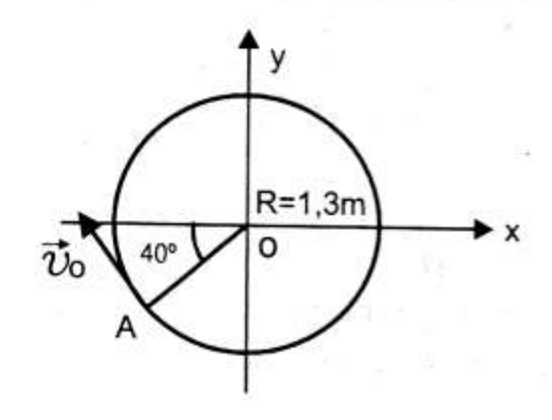
$d = 7{,}85\ m$

g) $a_T = \alpha . R$ | $a_c = \omega . \upsilon$ | $a^2 = a_T^2 + a_c^2$

$a_T = 1{,}17\ rad/s^2 . 075m$ | $a_c = 5{,}24 rad/s . 3{,}93\ m/s$ | $a^2 = (0{,}88\ m/s^2)^2 + (20{,}59\ m/s^2)^2$

$a_T = 0{,}88\ m/s^2$ | $a_c = 20{,}59\ m/s^2$ | $a = 20{,}61 m/s^2$

3. Una partícula se mueve en la trayectoria circular de la figura. Si parte del punto A con una rapidez de 36 km/h y, luego de girar un ángulo de $11\pi/3$ rad, llega al punto B con una rapidez de 10,8 km/h. Determinar:



a) La velocidad angular inicial y final
b) La aceleración angular.
c) El tiempo transcurrido.
d) La posición angular final.
e) La posición final.
f) La velocidad final.
g) La aceleración total final.

a)

$\upsilon_o = 36\ km/h \quad = 10 m/s$

$\upsilon_o = \omega_o . R$

$\omega_o = \dfrac{\upsilon_o}{R}$

$\omega_o = \dfrac{10\ m/s}{1{,}3\ m}$

$\omega_o = 7{,}69\ rad/s$

$\upsilon = 10{,}8\ km/h \quad = 3\ m/s$

$\upsilon = \omega . R$

$\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$

$\omega = \dfrac{3\ m/s}{1{,}3\ m}$

$\omega = 2{,}32\ rad/s$

b)

$\Delta\theta = 11\pi/3\ rad = 11{,}52\ rad$

$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha . \Delta\theta$

$\alpha = \dfrac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\,\Delta\theta} = \dfrac{(2{,}32\ rad/s)^2 - (7{,}69\ rad/s)^2}{2(11{,}52\ rad)}$

$\alpha = \dfrac{5{,}34\ rad^2/s^2 - 59{,}14\ rad^2/s^2}{23{,}04\ rad} = -2{,}34\ rad/s^2$

c)

$\omega = \omega_o + \alpha . \Delta t$

$\Delta t = \dfrac{\omega - \omega_o}{\alpha}$

$\Delta t = \dfrac{2{,}32\ rad/s - 7{,}69\ rad/s}{-2{,}34\ rad/s} = 2{,}3\ s$

d) $\Delta\theta = \theta - \theta_o$

$\theta = \theta_o + \Delta\theta$

$\theta = -140° - 11{,}52 \text{ rad}$

$\theta = -2{,}44 \text{rad} + 11{,}52 \text{ rad}$

$\theta = -13{,}96 \text{ rad}$

$\theta = -800{,}05°$

e) $\vec{r} = (1{,}3 \text{ m } -800{,}05°)$

$\vec{r} = (0{,}22\vec{i} - 1{,}28\vec{j})\text{m}$

f) $\vec{r} = (0{,}22\vec{i} - 1{,}28\vec{j})\text{m}$

$\vec{r} = (1{,}3 \text{ m}; 279{,}75°)$

$\phi = 279{,}75° - 270°$

$\phi = 9{,}75°$

$\beta = 180° + 9{,}75°$

$\beta = 189{,}75°$

$\vec{v} = (v; \beta)$

$\vec{v} = (3\text{m/s}; 189{,}75°)$

$\vec{v} = (-2{,}96\vec{i} - 0{,}51\vec{j})\text{m/s}$

g) $a_T = \alpha.R$

$a_T = -2{,}34 \text{ rad/s}^2 . 1{,}3\text{m}$

$a_T = -3{,}04 \text{ m/s}^2$

$\vec{a}_T = a_T(\vec{u}_v)$

$\vec{a}_T = -3{,}04\text{m/s}^2(-0{,}987\vec{i} - 0{,}17\vec{j})$

$\vec{a}_T = (3\vec{i} + 0{,}52\vec{j})\text{m/s}^2$

$a_c = \omega.v$

$a_c = 2{,}32 \text{ rad/s}.3\text{m/s}$

$a_c = 6{,}93\text{m/s}^2$

$\vec{a}_c = a_c(-\vec{u}_r)$

$\vec{a}_c = 6{,}93 \text{ m/s}^2(-0{,}169\vec{i} + 0{,}985\vec{j})$

$\vec{a}_c = (-1{,}17\vec{i} + 6{,}83\vec{j})\text{m/s}^2$

$\vec{u}_v = \dfrac{\vec{v}}{v} = \dfrac{(-2{,}96\vec{i} - 0{,}51\vec{j}) \text{ m/s}}{3\text{m/s}}$

$\vec{u}_v = -0{,}987\vec{i} - 0{,}17\vec{j}$

$\vec{u}_r = \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{(0{,}22\vec{i} - 1{,}28\vec{j}) \text{ m}}{1{,}3\text{m}}$

$\vec{u}_r = 0{,}169\vec{i} - 0{,}985\vec{j}$

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c$

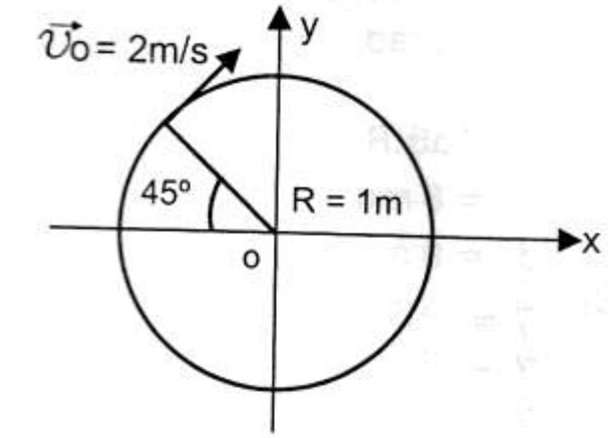
$\vec{a} = [(3\vec{i} + 0{,}52\vec{j}) + (-1{,}17\vec{i} + 6{,}83\vec{j})]\text{m/s}^2$

$\vec{a} = (1{,}83\vec{i} + 7{,}35\vec{j})\text{m/s}^2$

$\vec{a} = (7{,}57 \text{ m/s}^2; 76{,}02°)$

4. Una partícula que se mueve con movimiento circular se encuentra en la posición que indica la figura en t = 2 s. Si gira 8 segundos con una aceleración angular de -0,5 rad/s², determinar:

a) El desplazamiento angular.
b) El espacio angular recorrido.
c) El espacio lineal recorrido.
d) La posición cuando $v = 0$.
e) La posición final de la partícula.
f) La aceleración total en t = 10 s.



a) $v_o = \omega_o . R \Longrightarrow \omega_o = \dfrac{v_o}{R} = \dfrac{2 \text{ m/s}}{1 \text{ m}} = 2 \text{rad/s}$

$\Delta\theta = \omega_o . \Delta t + \frac{1}{2} \alpha . \Delta t^2$
$\Delta\theta = 2 \text{ rad/s} . 8\text{s} + \frac{1}{2} (-0,5 \text{ rad/s}^2)(64 \text{ s}^2)$
$\Delta\theta = 16 \text{ rad} - 16 \text{ rad}$
$\Delta\theta = 0$

Esto significa que la partícula va con MCUV retardado, se para instantáneamente y regresa al punto de partida con MCUV acelerado.

El tiempo de ida es cuando $v = 0$:

$a_T = \alpha . R$
$a_T = -0,5 \text{rad/s}^2 . 1\text{m}$
$a_T = -0,5 \text{m/s}^2$

$\overset{0}{\cancel{v}} = v_o + a_T . \Delta t_1 \Longrightarrow \Delta t_1 = \dfrac{-v_o}{a_T} = \dfrac{-2 \text{m/s}}{-0,5 \text{m/s}} = 4 \text{ s}$

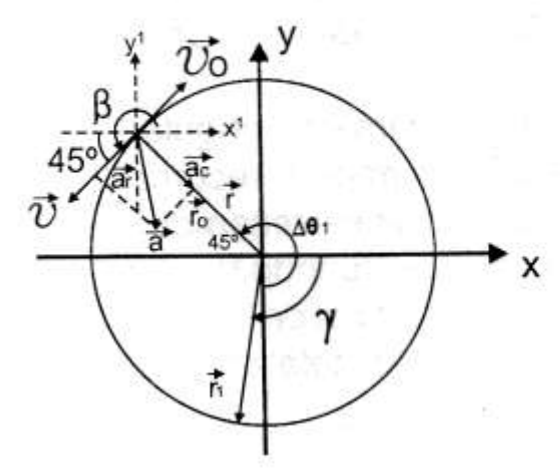
Como el movimiento se realiza con una aceleración angular constante y la partícula regresa al punto de partida, el tiempo de ida es igual al tiempo de regreso.

b) El espacio angular de ida es:

$\Delta\theta_1 = \omega_o . \Delta t_1 + \frac{1}{2} \alpha . \Delta t_1^2$
$\Delta\theta_1 = 2 \text{ rad/s} . 4\text{s} + \frac{1}{2}(-0,5 \text{ rad/s}) (16 \text{ s}^2)$
$\Delta\theta_1 = 8 \text{ rad} - 4 \text{ rad}$
$\Delta\theta_1 = 4 \text{ rad} = 229,18°$

Como el espacio angular de ida es igual al de regreso, el espacio angular total recorrido es:

$\Delta\theta = 2(4\ \text{rad})$
$\Delta\theta = 8\ \text{rad}$



c) $d = \Delta\theta . R$
$d = 8\ \text{rad} . 1\text{m}$
$d = 8\ \text{m}$

d) $\gamma = -\Delta\theta_1 + 135°$
$\gamma = -229{,}18° + 135°$
$\gamma = -94{,}18°$

$\vec{r}_1 = (1\text{m}; -94{,}18°)$
$\vec{r}_1 = (-0{,}07\,\vec{i} - 0{,}99\,\vec{j})\text{m}$

e) $\vec{r} = (1\text{m}; 135°)$
$\vec{r} = (-0{,}71\vec{i} + 0{,}71\vec{j})\text{m}$

f) En el momento de regreso:

$v = \not{v_0}^{\,0} + \alpha . \Delta t$
$v = -0{,}5\ \text{m/s}^2 . 4\ \text{s}$
$v = -2\text{m/s}$

El signo menos significa que la partícula está regresando.

$\vec{v} = (v; \beta)$
$\vec{v} = (2\text{m/s}; 225°)$
$\vec{v} = (-1{,}41\,\vec{i} - 1{,}41\,\vec{j})\text{m/s}$

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{(-1{,}41\,\vec{i} - 1{,}41\,\vec{j})\ \text{m/s}}{2\text{m/s}} = -0{,}705\,\vec{i} - 0{,}705\,\vec{j}$$

$\vec{a}_T = a_T\,(\vec{u}_v)$
$\vec{a}_T = 0{,}5\text{m/s}^2(-0{,}705\,\vec{i} - 0{,}705\,\vec{j})$
$\vec{a}_T = (-0{,}35\,\vec{i} - 0{,}35\,\vec{j})\text{m/s}^2$

$$\vec{a}_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\ \text{m/s})^2}{1\ \text{m}} = 4\text{m/s}^2$$

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(-0{,}71\vec{i} + 0{,}71\vec{j}\ \text{m})}{1\ \text{m}} = -0{,}71\,\vec{i} + 0{,}71\,\vec{j}$$

$\vec{a}_c = a_c\,(-\vec{u}_r)$
$\vec{a}_c = 4\text{m/s}^2(0{,}71\vec{i} - 0{,}71\,\vec{j})$
$\vec{a}_c = (2{,}84\,\vec{i} - 2{,}84\,\vec{j})\text{m/s}^2$

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_c$
$\vec{a} = [(-0{,}35\,\vec{i} - 0{,}35\,\vec{j}) + (2{,}84\,\vec{i} - 2{,}84\,\vec{j})]\text{m/s}^2$
$\vec{a} = (2{,}49\,\vec{i} - 3{,}19\,\vec{j})\text{m/s}$
$\vec{a} = (4{,}05\text{m/s}^2; 307{,}97°)$

EJERCICIO Nº 12

1. Un automóvil parte del reposo en una vía circular de 400 m de radio con MCUV hasta que alcanza una rapidez de 72km/h en un tiempo de 50 s.
Determinar:

a) La velocidad angular final.
b) La velocidad angular media.
c) La aceleración angular.
d) El desplazamiento angular.
e) La distancia recorrida.
f) El tiempo que tarda en dar 100 vueltas.
g) El módulo de la aceleración total final.

2. Una turbina de un jet se acelera de 0 a 6000 RPM en 20 s. Si el radio de la turbina es 1,2 m, determinar:

a) La velocidad angular final.
b) La velocidad angular media.
c) La aceleración angular.
d) La rapidez media.
e) El desplazamiento angular.
f) La distancia recorrida por el extremo de la turbina.
g) El módulo de la aceleración total final.

3. Un punto animado de movimiento circular cambia su velocidad angular de 200 RPM a 2600 RPM en 2 min. Si el radio de la trayectoria es 1,5 m, determinar:

a) La rapidez inicial.
b) La velocidad angular final.
c) La aceleración angular.
d) El desplazamiento angular.
e) Cuántas vueltas dio.
f) La distancia recorrida.
g) El módulo de la aceleración total inicial.

4. Un cuerpo describe una trayectoria circular de 1m de radio con una aceleración angular de 1,3 rad/s^2. Cuando ha girado un ángulo de $7\pi/3$ rad alcanza una velocidad angular de 42 RPM.
Determinar:

a) La velocidad angular inicial.
b) La velocidad angular media.
c) La rapidez inicial.
d) La rapidez final.
e) El tiempo empleado.

5. A una partícula que está girando con una velocidad angular de 6 rad/s se le comunica una aceleración angular de 2,8 rad/s^2 durante 1 min. Si el radio de la trayectoria circular es de 0,6m, determinar:

a) La rapidez inicial.
b) La velocidad angular final.
c) La rapidez final.
d) La velocidad angular media.
e) El desplazamiento angular.
f) Cúantas vueltas da.
g) El módulo de la aceleración total inicial.

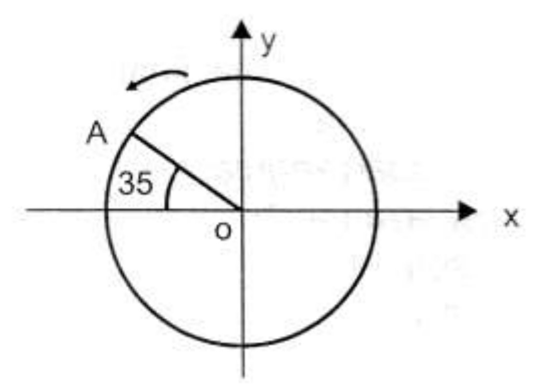
6. La velocidad angular de un volante disminuye uniformemente de 1000 RPM en 7 s. Si el radio de la curvatura es de 25 cm, determinar:

a) La rapidez inicial.

b) La velocidad angular media.
c) La aceleración angular.
d) El desplazamiento angular.
e) Cuántas vueltas da.
f) Qué tiempo será necesario para que el volante se detenga.
g) El módulo de la aceleración total final.

7. Un volante de 10 cm de radio gira en tomo a su eje a razón de 400 RPM. Un freno lo para en 15 s. Determinar:
a) La velocidad angular inicial.
b) La rapidez en el momento de aplicar el freno.
c) La velocidad angular media.
d) El desplazamiento angular.
e) Cuántas vueltas da hasta detenerse.
f) La distancia recorrida.
g) El módulo de la aceleración total inicial.

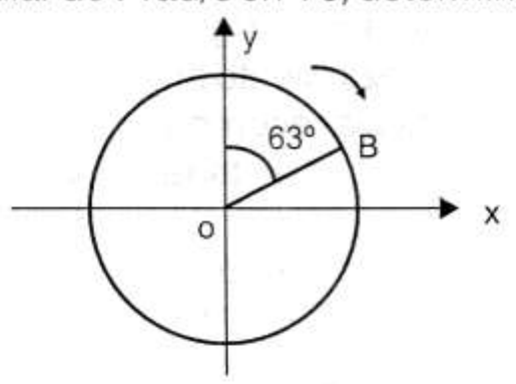
8. Una partícula describe una trayectoria circular de 0,8 m de radio en sentido antihorario. Si parte del reposo y del punto A, realizando un desplazamiento angular de 10 rad en 3 s, determinar:



a) La aceleración angular.
b) La posición angular final.
c) La posición final.
d) La velocidad angular media.
e) La distancia recorrida.

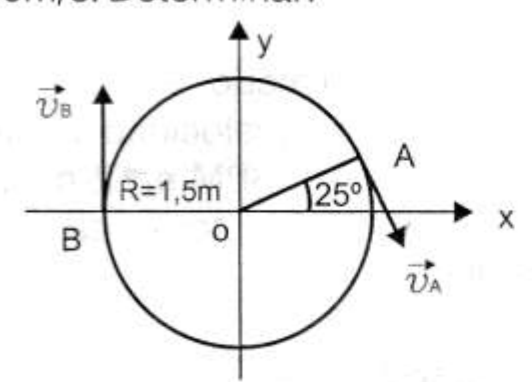
f) La velocidad final.
g) La aceleración total final.

9. Una partícula se mueve en una trayectoria circular de 1,4 m de radio en sentido horario. Si parte del reposo y del punto B, alcanzando una velocidad angular de 7 rad/s en 4 s, determinar:



a) La aceleración angular.
b) El desplazamiento angular.
c) La velocidad angular media.
d) La posición angular final.
e) La posición final.
f) La velocidad final.
g) La aceleración total final.

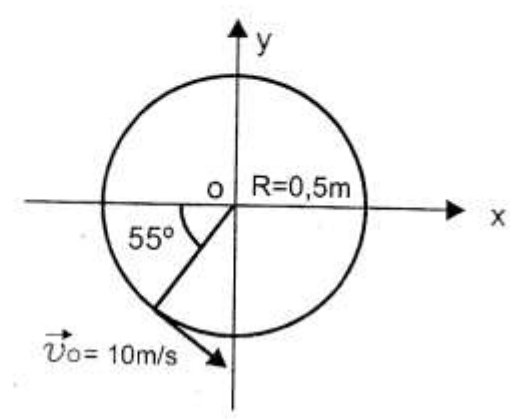
10. Una partícula animada de MCUV, parte del punto A, como indica la figura, con una rapidez de 4m/s y luego de 3 s pasa por el punto B con una rapidez de10m/s. Determinar:



a) La velocidad angular inicial.
b) La aceleración angular.
c) El desplazamiento angular.

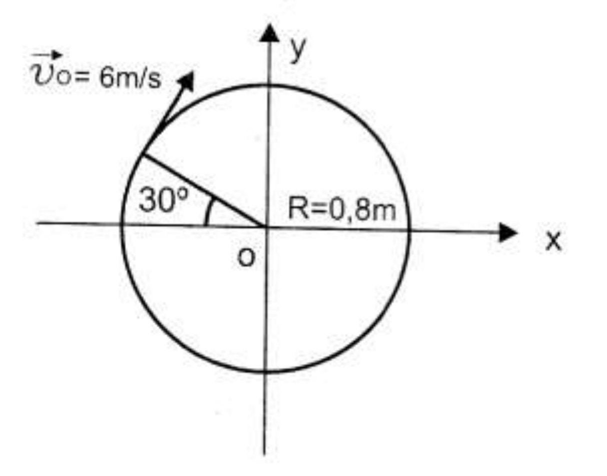
d) La posición inicial.
e) La velocidad en B.
f) La aceleración total en A.
g) La aceleración total en B.

11. Una partícula se mueve en la trayectoria circular de la figura con una rapidez de 10 m/s y una aceleración angular de $(-2\pi/5)rad/s^2$ hasta detenerse. Determinar:



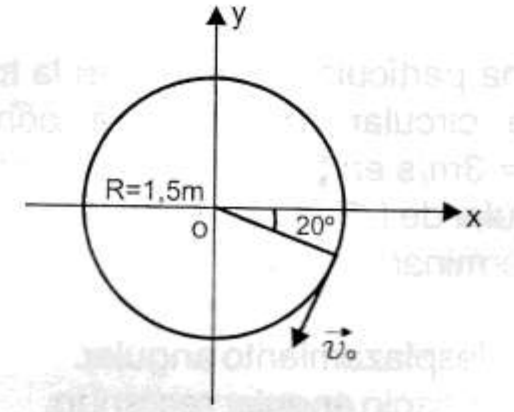
a) La velocidad angular inicial.
b) La velocidad inicial.
c) El tiempo hasta detenerse.
d) El desplazamiento angular.
e) La posición angular final.
f) La posición final.
g) La aceleración total inicial.

12. Una partícula animada de MCUV está en la posición que indica la figura. Si se mueve durante 4 s con una aceleración angular de -1 rad/s^2, determinar:



a) La velocidad angular inicial.
b) La velocidad angular final.
c) El desplazamiento angular.
d) La posición angular final.
e) La posición final.
f) La velocidad final.
g) La aceleración total final.

13. Una partícula se mueve en la trayectoria circular de la figura con una $v = 4m/s$ en $t = 0s$ y una aceleración angular de -0,8rad/s^2. Determinar:

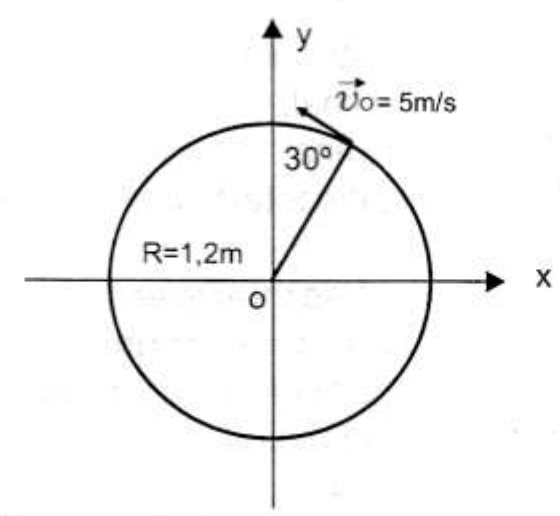


a) El desplazamiento angular.
b) El espacio angular recorrido.
c) El espacio lineal recorrido.
d) La posición cuando $v_o = 0$.
e) La posición final de la partícula.
f) La velocidad en $t = 8$ s.
g) La aceleración total en $t = 8$ s.

14. Una partícula que tiene movimiento circular, se encuentra en la posición que indica la figura en $t = 4$ s. Si gira con una aceleración angular de -1 rad/s^2 durante 10 s. Determinar:

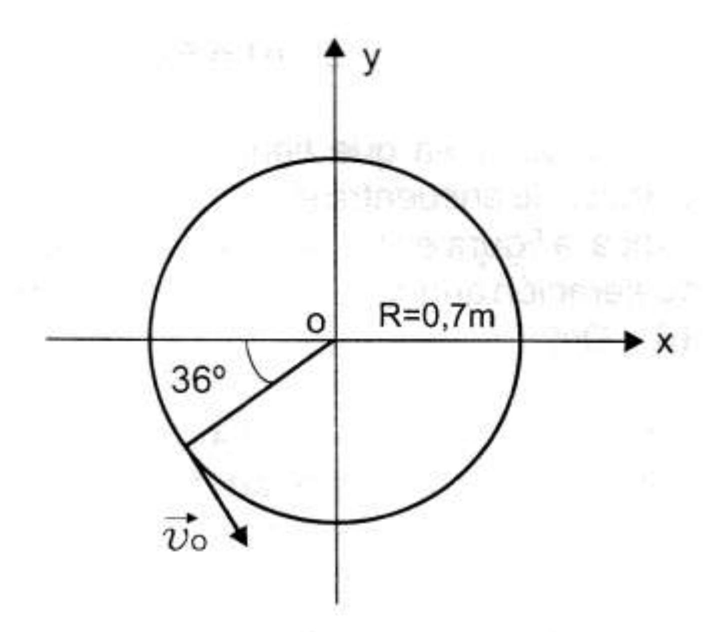
a) El desplazamiento angular.
b) El espacio angular recorrido.
c) El espacio lineal recorrido.
d) La posición cuando $v = 0$
e) La posición final de la partícula.

f) La velocidad en t = 14 s.
g) La aceleración total en t = 14 s.



15. Una partícula se mueve en la trayectoria circular de la figura con una v_o = 3m/s en t = 0s y una aceleración angular de $(-\pi/3)$rad/s^2 durante 7 s. Determinar:

a) El desplazamiento angular.
b) El espacio angular recorrido.
c) El espacio lineal recorrido.
d) La posición cuando $v = 0$.
e) La posición final de la partícula.
f) La velocidad en t = 7 s.
g) La aceleración total en t = 7 s.

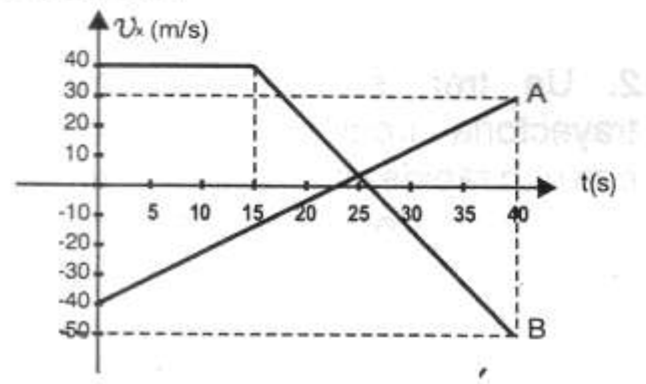


2.4 MISCELÁNEA DE PROBLEMAS

1.La información de una nave espacial que se encuentra en Marte, demora 20 minutos en llegar a la Tierra. Si la velocidad de la luz es $3x\ 10^5$ km/s, determinar:

a) La distancia entre los dos planetas.
b) Qué velocidad en km/h lleva la información a los 10 minutos.
c) La distancia recorrida por la información en 1 minuto.
d) El tiempo que necesita la informción para recorrer 100.000 km.

2. El diagrama $\upsilon_x t$ de la figura, representa el movimiento de dos partículas a lo largo de una trayectoria rectilínea y a partir de una misma posición inicial. Determinar:



a) El tiempo de movimiento de cada partícula.
b) La distancia recorrida por cada partícula.
c) La rapidez media de cada partícula.
d) El gráfico $r_x t$ y $a_x t$ de cada partícula.

3. Desde 200 m de altura se deja caer libremente un cuerpo. Determinar:

a) Qué velocidad lleva el cuerpo cuando ha descendido 80 m.
b) Qué espacio ha recorrido cuando lleva una velocidad de $(-40\vec{j})$m/s.
c) Con qué velocidad choca contra el suelo.

4. Una locomotora se mueve con una rapidez constante de 61,2 km/h en una curva de 500 m de radio. Determinar:

a) La velocidad angular.
b) El ángulo girado en 8 s.
c) El tiempo necesario para girar un ángulo de 75°
d) El módulo de la aceleración centrípeta.

5. Un cuerpo parte del reposo y se mueve por una trayectoria recta 70 m, con una aceleración de $(2\vec{i} - 3\vec{j})$ m/s^2. Determinar:

a) La velocidad adquirida.
b) La velocidad media.
c) El tiempo transcurrido.
d) El desplazamiento realizado.

6. Un generador de turbina en una represa se acelera desde el reposo hasta 4500 RPM en 15 minutos. Si el radio de un aspa de la turbina es 1,6 m, determinar:

a) La aceleración angular.
b) El espacio angular recorrido.
c) La rapidez final del extremo del aspa.
d) El módulo de la aceleración total final de un extremo del aspa.

7. Desde lo alto de una torre se lanza un cuerpo con una velocidad de $(25\vec{i})$m/s, y llega al suelo en 8 segundos. Determinar:

a) La distancia recorrida horizontal y verticalmente durante los 5 primeros segundos.

b) La posición del cuerpo en el momento de llegar al suelo.

c) La velocidad del cuerpo cuando choca contra el suelo.

d)La aceleración tangencial y centrípeta en el momento de llegar al suelo.

8. Un cuerpo, a una velocidad constante de $(20\vec{i} + 30\vec{j})$ km/h, ha recorrido la mitad de su camino en 2 horas.
Determinar:

a) Con qué rapidez constante debe continuar su movimiento rectilíneo para que durante ese mismo intervalo de tiempo, llegue a donde iba y regrese al punto de partida.

b) La velocidad que tendrá en la otra mitad.

c) La velocidad que tendrá al regreso.

d) La rapidez que tendrá al regreso.

9. Una partícula gira por una trayectoria circular de 20 cm de radio con una rapidez constante, que es igual numéricamente a la mitad de la aceleración.
Determinar:

a) La velocidad angular de la partícula.

b) El período.

c) Cuántas vueltas da por minuto.

d)El módulo de la aceleración centrípeta.

10. Dos jugadores de fútbol separados 36m patean una pelota. Cuando uno de ellos patea la pelota al otro, hace que ésta permanezca 3 s en el aire.
Determinar:

a) El ángulo de lanzamiento.

b) Con qué velocidad fue lanzada la pelota.

c) La altura máxima.

d) La aceleración tangencial y centrípeta a los 2 s.

11. Desde un globo que se muéve con velocidad constante de $(-8\vec{j})$m/s se deja caer libremente un cuerpo que llega al suelo con una velocidad de $(-80\vec{j})$m/s.
Determinar:

a) La altura del globo.

b) El tiempo que tarda el cuerpo en llegar al suelo.

c) El desplazamiento realizado por el cuerpo.

d) Que altura ha descendido el cuerpo cuando lleva una velocidad de $(-65\vec{j})$m/s.

12. Un tren se desplaza por una trayectoria circúlar de 800 m de radio con una rapidez inicial de 54 km/h y una rapidez final de 18 km/h. Determinar:

a) La aceleración angular producida.

b) El tiempo de marcha para este arco.

c)La aceleración total del tren al comienzo del arco.

d) La aceleración total del tren al final del arco.

13. Un móvil pasa de $(8\vec{i} + 6\vec{j})$m/s a $(20\vec{i} + 15\vec{j})$m/s en 1/5 de minuto.
Determinar:

a) Las características del movimiento.

b) La aceleración producida.

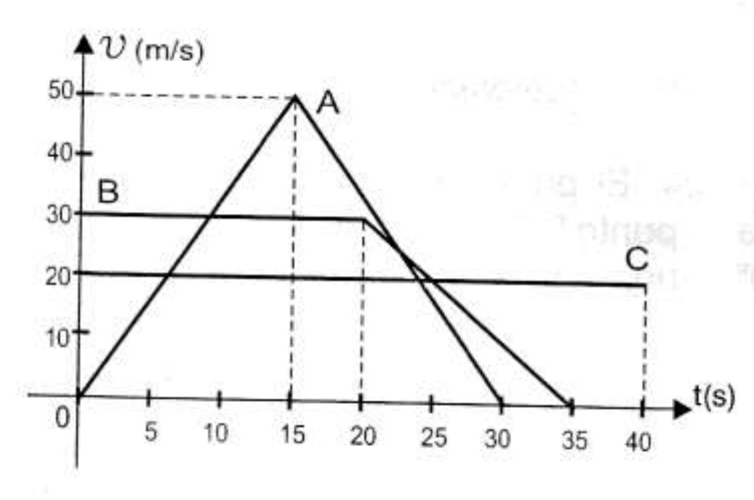
c) La velocidad media.

d) El desplazamiento realizado.

14. Un satélite gira en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 400 km, demorando 1,55 h en cada órbita. (Radio aproximado de la lierra: 6370 km). Determinar:

a) La velocidad del satélite en km/h.
b) El tiempo necesario para girar un ángulo de 300°
c) El número de vueltas que da en un año.
d) El módulo de la aceleración centrípeta.

15. El diagrama $v$xt de la figura representa el movimiento de tres vehículos a lo largo de una carretera recta a partir de una misma posición inicial. Determinar:

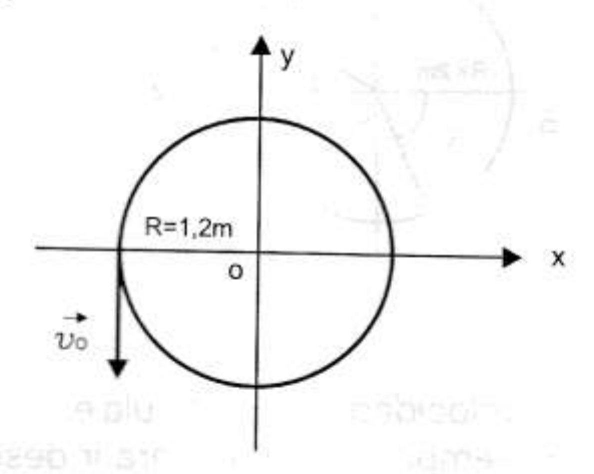


a) El tiempo de movimiento de cada vehículo.
b) La distancia recorrida por cada uno.
c) La rapidez media de cada vehículo.
d) El gráfico $r$xt y $a$xt para cada uno.

16. Una avioneta aterriza con una velocidad de $(-48\vec{i} + 62\vec{j})$km/h y se detiene después de recorrer 180 m. Determinar:

a) La aceleración producida por los frenos.
b) El tiempo empleado.
c) La velocidad media.
d) El desplazamiento realizado.

17. La velocidad angular de un cuerpo aumenta de 20 rad/s a 30 rad/s en 5 s, partiendo de la posición que indica la figura. Determinar:



a) La aceleración angular del cuerpo.
b) El desplazamiento angular realizado.
c) La posición final del cuerpo.
d) La aceleración total final.

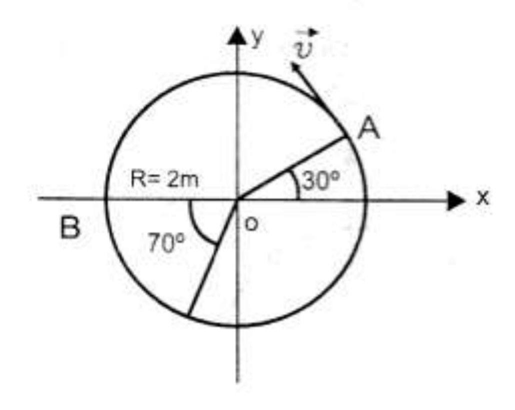
18. Se lanza un cuerpo con una velocidad de $(100\vec{j})$ m/s. Determinar:

a) Qué velocidad lleva a los 3 y 15 s.
b) A qué altura del suelo se encuentra a los 5 y 18s.
c) La altura máxima alcanzada.
d) El tiempo de vuelo.

19. A un móvil que va por una trayectoria recta a una velocidad de $(-20\vec{i} -15\vec{j})$m/s se le comunica una aceleración negativa de módulo 2,5 m/s^2 durante 20 s. Determinar:

a) El desplazamiento realizado.
b) Para qué tiempo la velocidad se anula.
c) La distancia recorrida.
d) La velocidad final.

20. Una partícula se mueve sobre la trayectoria circular de la figura con una rapidez constante de 16 m/s.
Determinar:



a) La velocidad de la partícula en A y B.
b) El tiempo necesario para ir desde A hasta B.
c) La posición que tiene la partícula en A y en B.
d) La aceleración centrípeta en A y B.

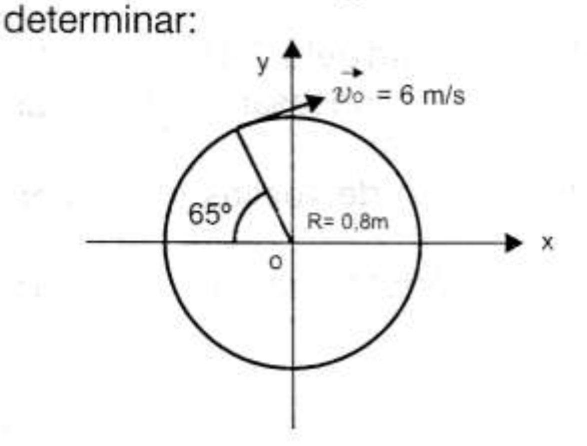
21. Se lanza horizontalmente un objeto a una altura de 80 m y se observa que llega a tierra formando un ángulo de 60° con la horizontal. Determinar:

a) El tiempo de caída.
b) Con qué velocidad fue lanzado.
c) La posición del objeto en el momento de llegar a tierra.
d) Con qué velocidad llega a tierra.

22. Un móvil que va por una carretera recta, lleva una velocidad constante de $(-15\ \vec{i} + 20\ \vec{j})$ m/s durante10 s. A continuación acelera a razón de 5m/s durante 4 s. Determinar:

a) El espacio total recorrido.
b) El desplazamiento realizado.
c) La velocidad final.
d) La velocidad media

23. Una partícula animada de movimiento circular, se encuentra en la posición que indica la figura en t = 2 s. .Si gira con una aceleración angular de $-2 rad/s^2$ durante 6 segundos, determinar:



a) El espacio angular recorrido desde t = 2 s hasta t = 3s.
b) La posición de la partícula cuando $v = 0$.
c) La posición final de la partícula.
d) La aceleración total en t = 8s.

24. El punto A está a 100 m sobre el punto B. Desde A se lanza un móvil con una velocidad de $(-35\vec{j})$ m/s.
Simultáneamente, desde B se deja caer libremente otro móvil. Si los dos móviles llegan al suelo al mismo tiempo, determinar:

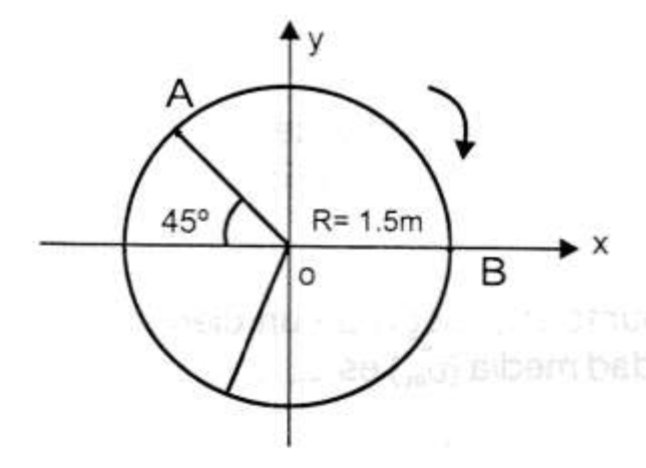
a) Qué distancia los separa a los 3 s de haber partido.
b) A qué altura del suelo se encuentra el punto A.
c) El tiempo que tardan los cuerpos en llegar al suelo.
d) Con qué velocidad llegan al suelo.

25. Desde un mismo punto parten dos móviles: A y B. El móvil A parte 6 s antes que el B con una rapidez de 5 m/s y una aceleración de módulo 1 m/s^2. El móvil B parte del reposo con una aceleración de módulo 1,4 m/s^2. Hallar la

distancia que los separa a los 8 s de partir el móvil B:

a) Cuando tiene la misma dirección y sentido.
b) Cuando tiene la misma dirección y sentido contrario.

26. Una partícula se mueve sobre la trayectoria circular de la figura en sentido horario con una velocidad angular constante de 10 π rad/s. Determinar:



a) La velocidad de la partícula en A y en B.
b) La distancia recorrida desde A hasta B.
c) El tiempo necesario para ir desde A hasta B.
d) La aceleración centrípeta en A y en B.

27. Un proyectil se mueve en el plano vertical de acuerdo con la ecuación $x = 300\,t$, $y = 400\,t - 4{,}9\,t^2$ (t se mide en segundos; x e y, en metros). Determinar:

a) La velocidad inicial del proyectil.
b) El tiempo de vuelo.
c) La velocidad y posición para cualquier tiempo.
d) El alcance horizontal.

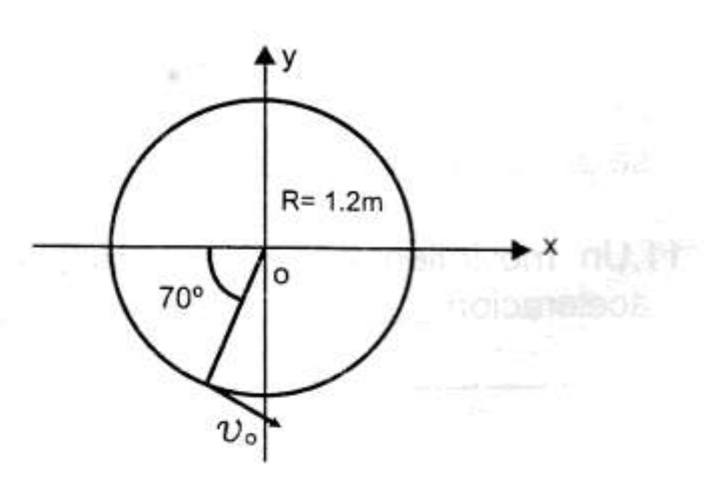
28. La distancia entre dos puntos A y B es de 300 m. Desde A parte del reposo hacia B un móvil con una aceleración de módulo 1,5 m/s^2. Simultáneamente, desde B parte hacia A otro móvil con una rapidez de 10 m/s y una aceleración de módulo 0,8 m/s^2. Hallar dónde y cuándo se encuentran.

29. Desde un mismo punto se lanzan dos cuerpos A y B. El cuerpo A con una velocidad de ($50\vec{j}$) m/s y, 3 s después, el cuerpo B con una velocidad de ($65\vec{j}$) m/s. Determinar:

a) Qué distancia los separa, a los 4 s de partir B.
b) La altura máxima alcanzada por cada cuerpo.
c) Dónde y cuándo se encuentran.
d) Qué velocidad llevan los cuerpos en el momento del encuentro.

30. Una patícula se mueve en la trayectoria circular de la figura con una v_o = 6m/s en t = 0 s y una aceleración angular de 1,5 rad/s^2 durante 7 s. Determinar:

a) El espacio angular recorrido.
b) La posición de la partícula cuando v = 0.
c) La posición final de la partícula.
d) La aceleración total en 7 s.



2.5 EVALUACIÓN OBJETIVA

COMPLETAR:

1. La variación del vector posición que una partícula experimenta en un intervalo de tiempo se denomina ______________________________.

2. El vector desplazamiento es ______________________ de la trayectoria que siga la partícula en su movimiento.

3. La distancia recorrida por una partícula es ______________________ o ______________________ al módulo del desplazamiento que experimenta una partícula al moverse de una posición a otra.

4. La distancia recorrida por una partícula es igual al módulo del desplazamiento, siempre que la trayectoria sea ______________________ y no existan cambios en el sentido del movimiento.

5. Una partícula inicia su movimiento en el punto P, y luego de un cieno tiempo Δt, regresa a la misma posición. El vector velocidad media ($\vec{v}_m$) es ______________________ .

6. El vector velocidad instantánea tiene una dirección ______________________ a la trayectoria en el punto de análisis.

7. Cuando un objeto cae libremente desde una posición de reposo, la aceleración al finalizar el sexto segundo es ______________________ .

8. La rapidez instantánea es igual al ______________________ del vector velocidad.

9. Si una partícula se mueve con velocidad ($\vec{v}$) constante, su aceleración es igual a ______________________.

10. Si al moverse una partícula, cambia el valor del módulo de su velocidad, se genera una aceleración ______________________; y si únicamente cambia la dirección, se genera una aceleración ______________________ .

11. Un movimiento curvilíneo es siempre acelerado porque al menos existe la aceleración ______________________ , puesto que la velocidad cambia al menos en ______________________ .

12. Cuando se lanza un objeto verticalmente hacia arriba, la rapidez disminuye en ____ ____________________ en cada segundo mientras asciende.

13. En el movimiento rectilíneo uniforme la velocidad es ____________________ y la aceleración es ____________________ .

14. Si una partícula se desplaza por una trayectoria rectilínea, su aceleración normal es ____________________ , puesto que la velocidad no cambia de ____________________ .

15. Para una partícula que se desplaza sobre una trayectoria rectilínea:

a) En el gráfico componente de la posición en función del tiempo, la tangente en cada punto representa el valor de ____________________

b) En el gráfico componente de la velocidad en función del tiempo, la tangente en cada punto representa el valor de ____________________ ; y el área bajo la curva, el módulo del desplazamiento, si se realiza la suma ____________________ de las áreas o la distancia recorrida si se considera la suma ____________________ de las áreas en un cierto intervalo de tiempo.

c) En el gráfico componente de la velocidad en función del tiempo, si ésta cambia de signo en algún (t), significa que en ese instante la partícula ____________________ su sentido de movimiento.

16. Si en un movimiento rectilíneo, el módulo de la velocidad cambia valores iguales en intervalos de tiempo iguales, el movimiento es ____________________ variado.

17. El movimiento parabólico, es un movimiento curvilíneo con ____________________ constante.

18. En un movimiento parabólico, el módulo de la velocidad es ____________________ cuando la partícula se encuentra en el punto de altura máxima, en el cual tiene una dirección ____________________ a la aceleración total, que es además en ese instante igual a la aceleración ____________________ .

19. Al lanzarse un proyectil, mientras asciende, la velocidad y la gravedad forman un ángulo en el punto de máxima altura son ____________________ y al descender forman un ángulo ____________________

20. Al movimiento de proyectiles se lo considera un movimiento compuesto, formado por un movimiento ______________________________ en el eje horizontal x, y un movimiento ______________________________ en el eje vertical y, y donde además la aceleración total es la ______________________________.

21. En el lanzamiento de un proyectil, cuando éste pasa por un mismo nivel, al ascender o al descender tiene igual valor ______________________________ de la velocidad.

22. Cuando el ángulo de lanzamiento (de elevación) de un proyectil es de 45° su alcance es ______________________________.

23. Para ángulos de lanzamiento (de elevación) cuyos valores son complementarios, los alcances son ______________________________.

24. Si una partícula en un movimiento circular recorre arcos iguales en tiempos iguales, el movimiento es ______________________________

25. En el movimiento circular uniforme, la velocidad tiene una dirección ______________________________ a la trayectoria y además es ______________________________ a la aceleración total.

26. En el movimiento circular uniforme la aceleración total es igual a la aceleración ______________________________.

27. En el movimiento circular uniformemente variado, permanece constante el valor de la aceleración ______________________________, por lo que el módulo de la aceleración ______________________________ es constante.

28. En el movimiento circular uniformemente variado, el módulo de la velocidad es ______________________________ en función del tiempo.

29. Si un disco gira con MCUV, mientras mayor sea, el valor del radio de la trayectoria, el módulo de la aceleración normal será ______________________________.

30. Si el ángulo formado entre la aceleración total y la velocidad en un MCUV es agudo, el movimiento es ______________________________.

ESCRIBIR (V) VERDADERO Y (F) FALSO

1. Un objeto en caída libre incrementa su rapidez en 0,9 m/s en cada segundo de caída .... ( )

2. Si una partícula se desplaza por una trayectoria rectilínea, el módulo del desplazamiento siempre será igual a la distancia recorrida .... ( )

3. El vector velocidad media siempre es tangente a la trayectoria .... ( )

4. El vector velocidad instantánea es siempre tangente a la trayectoria .... ( )

5. Si una partícula se desplaza por una trayectoria curvilínea entre dos puntos, la distancia recorrida. es mayor que el módulo del desplazamiento .... ( )

6. Si una partícula se desplaza por una trayectoria curvilínea entre dos puntos, la rapidez media es igual al módulo de la velocidad .... ( )

7. Si una partícula se desplaza por una trayectoria curvilínea, de hecho posee aceleración .... ( )

8. Si una partícula se desplaza por una trayectoria curvilínea con rapidez constante su aceleración total es nula .... ( )

9. Si la velocidad varía únicamente en módulo, la aceleración total es la aceleración tangencial .... ( )

10. Si en un instante determinado la velocidad y la aceleración forman un ángulo de 45° entonces los módulos de la aceleración normal y tangencial son iguales .... ( )

11. En el movimiento rectilíneo el unitario del desplazamiento instantáneo indica la dirección de la velocidad instantánea .... ( )

12. En el movimiento rectilíneo uniforme la aceleración tangencial es constante y diferente de cero .... ( )

13. En el movimiento rectilíneo uniformemente variado, la aceleración total es constante .... ( )

14. Si la gráfica de la componente de la posición en función del tiempo es una recta horizontal, significa que la velocidad es nula .... ( )

15. Si la gráfica de la componente de la posición en función del tiempo, es una recta inclinada, significa que la aceleración es nula ....

16. Si la gráfica de la componente de la velocidad en función del tiempo, es una recta horizontal, quiere decir que el móvil está en reposo .... ( )

17. En una gráfica $v$xt, el área total bajo la curva representa el valor de la distancia total recorrida (suma geométrica de las áreas) .... ( )

18. En la gráfica de la componente de la velocidad en función del tiempo, el valor de la tangente en cada punto representa el valor de la aceleración .... ( )

19. Si en un instante determinado, en los gráficos vxt, y axt, las componentes de la velocidad y aceleración tienen signo negativo, el movimiento es acelerado ( )

20. Al moverse una partícula sobre una trayectoria rectilínea, si hay un punto de inversión en el sentido del movimiento, éste cambia de retardado a acelerado ( )

21. En el movimiento parabólico la aceleración total es constante .... ( )

22. En el movimiento parabólico la dirección de la velocidad cambia, pero su módulo permanece constante .... ( )

23. Cuando un proyectil alcanza su altura máxima, la aceleración total es cero (nula) .... ( )

24. En el lanzamiento de un proyectil formando un ßngulo agudo con la horizontal, la aceleración tangencial puede llegar a ser igual a la aceleración total .... ( )

25. En el MCU la velocidad permanece constante .... ( )

26. En el MCU el módulo de la velocidad permanece constante .... ( )

27. Si un disco gira aceleradamente, la velocidad angular y la aceleración angular de sus puntos será mayor mientras mayor sea el radio de su trayectoria .... ( )

28. El módulo de la aceleración tangencial en un MCUV permanece constante .... ( )

29. El vector aceleración normal, o centrípeta, en el MCUV únicamente cambia en el valor de su módulo .... ( )

30. En el MCUV la aceleración total es igual a la aceleración tangencial .... ( )

SUBRAYAR LA RESPUESTA CORRECTA:

1. Siendo $|\Delta \vec{r}|$ = módulo del desplazamiento, y d = distancia recorrida, en todo movimiento se cumple que:

a) $\Delta r = d$
b) $\Delta r \geq d$
c) $\Delta r \leq d$
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

2. El vector desplazamiento para una partícula que se desplaza entre dos posiciones fijas depende de:

a) La forma de la trayectoria entre los puntos inicial y final.
b) La ubicación del sistema de referencia.
c) La variación entre los vectores posición inicial y final.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

3. Una partícula se desplaza por una trayectoria rectilínea, partiendo de un punto A; recorre una distancia d(m) en t(s), hasta llegar a un punto B. Si luego regresa al punto A con las mismas características en el movimiento, el módulo de la velocidad media será:

a) 0 (m/s)

b) $\frac{d}{t}$ (m/s)

c) $\frac{d}{2t}$ (m/s)

d) Ninguna de las respuestas anteriores.

4. En relación con la pregunta 3, la rapidez media será:

a) 0 (m/s)

b) $\frac{d}{t}$ (m/s)

c) $\frac{2d}{t}$ (m/s)

d) Ninguna de las respuestas anteriores.

5. En un movimiento curvilíneo, el vector velocidad media es:

a) Tangente a la trayectoria.
b) Paralelo al vector desplazamiento.
c) Perpendicular a la aceleración.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

6. Sobre una recta están ubicados los puntos A, B Y C, tal que AB = BC = d. Una partícula recorre la recta con rapidez constante v_1 de A hasta B y con rapidez constante v_2 de B hasta C. La rapidez media en el recorrido AC es:

a) $v_m = \frac{2v_1 . v_2}{v_1 + v_2}$

b) $v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$

c) $v_m = \frac{2d}{v_1 + v_2}$

d) Ninguna de las respuestas anteriores.

7. En relación con la pregunta anterior, la rapidez media:
a) No depende de la distancia d.

b) Disminuye al disminuir d.
c) Primero aumenta y luego disminuye, a medida que d aumenta.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

8. Si en el movimiento de una partícula existe únicamente aceleración tangencial, su trayectoria es:

a) Circular.
b) Parabólica.
c) Rectilínea.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

9. Una aceleración nula quiere decir que la velocidad:

a) Aumenta.
b) Es cero.
c) Es constante.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

10. Si una partícula se desplaza por una trayectoria curvilínea, al menos tiene:

a) Aceleración tangencial.
b) Aceleración normal o centrípeta.
c) Rapidez variable.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

En las preguntas desde la número 11 hasta la número 20, el movimiento de las partículas es rectilíneo, y los gráficos posición, velocidad y aceleración en función del tiempo realmente son sólo de las componentes de estas magnitudes en la dirección del movimiento:

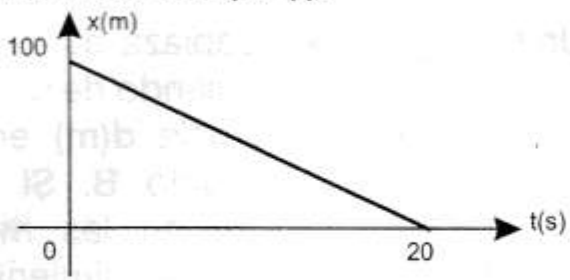
11. En el gráfico componente de la posición en función del tiempo, el valor de la pendiente en cada punto representa:

a) La distancia total reconida.
b) El valor de la aceleración (componente).
c) El valor de la velocidad (componente).
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

12. Si la pendiente en una gráfica v xt es cero, significa que:

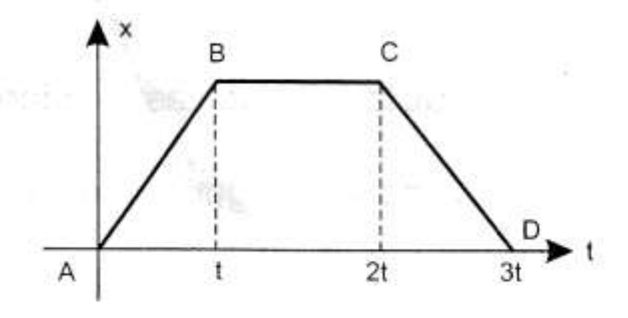
a) La aceleración es constante y diferente de cero.
b) El móvil está en reposo.
c) El móvil se mueve hacia la izquierda.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

13. Una partícula se desplaza de acuerdo con el gráfico siguiente. Cuál será la ecuación de la posición (**x**) en función del tiempo (t)?



a) $x = 20 + 5t$
b) $x = 20 + 5t^2$
c) $x = 100 - 20t$
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

14. En el gráfico siguiente se representa la posición de una partícula en función del tiempo:



14.1 De acuerdo con el gráfico se puede afirmar que:

a) En el tramo $\overline{BC}$ el movimiento es uniforme.

b) Desde el tiempo t hasta 2t, la partícula se encuetra en el origen.

c) En los tramos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ el movimiento es uniforme.

d) Ninguna.

14.2 El el tramo $\overline{BC}$:

a) La velocidad es mayor que en el tramo $\overline{AB}$.

b) La velocidad es igual que en el tramo $\overline{AB}$.

c) La velocidad es la máxima en todo el movimiento.

d) Ninguna.

14.3 En el tramo $\overline{CD}$:

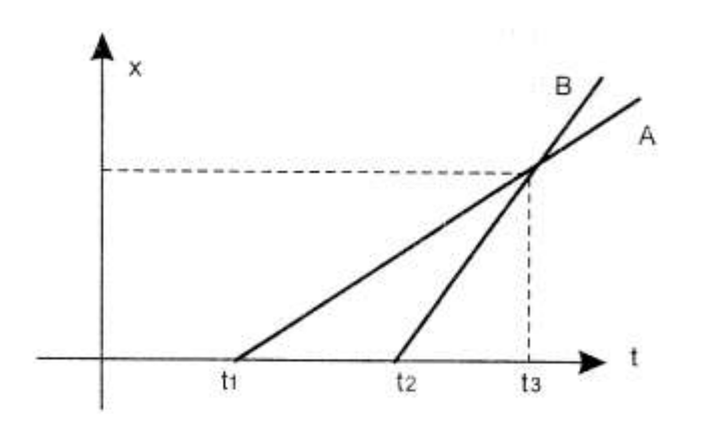
a) La velocidad es variable.

b) La velocidad es igual, en módulo a la del tramo $\overline{AB}$.

c) La velocidad disminuye gradualmente.

d) Ninguna.

15. En el gráfico siguiente se han representado las posiciones de dos partículas, A y B, en función del tiempo:



15.1 Con relación al gráfico se puede afirmar que:

a) A y B inician el movimiento al mismo tiempo.

b) En el tiempo t_3, las dos partículas tienen igual velocidad.

c) Hasta el tiempo t_3 , las dos partículas recorren la misma distancia.

d) Ninguna.

15.2 De las velocidades de A(v_a) y de B(vb) se puede afirmar que:

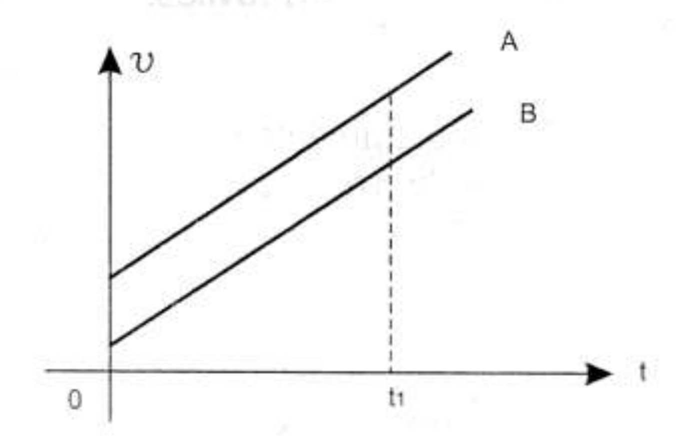
a) $v a < v b$

b) $v a = v b$

c) $v a = 2 v b$

d) Ninguna.

16. En el gráico siguiente se han representado las velocidades de dos partículas, A y B, en función del tiempo:



16.1 De las aceleraciones de A (a_A) y de B (a_B) se pueden afirmar que:

a) $a_A > a_B$

b) $a_A < a_B$

c) $a_A = 2a_B$

d) Ninguna.

16.2 Las distancias recorridas por A(d_A) y por B(d_B) en el intervalo de tiempo desde $t = 0$ hasta $t = t_1$ se cumple que:

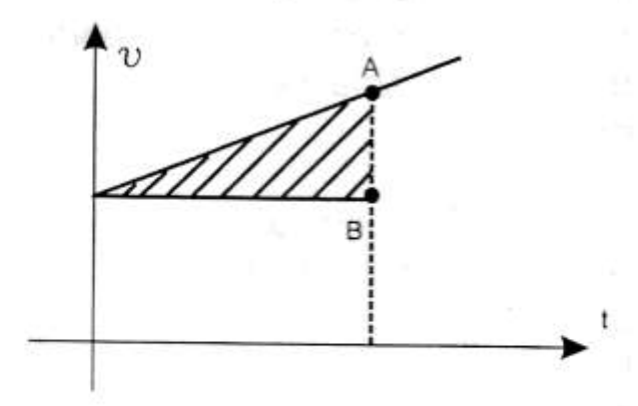
a) $d_A = d_B$

b) $d_A < d_B$

c) $d_A > d_B$

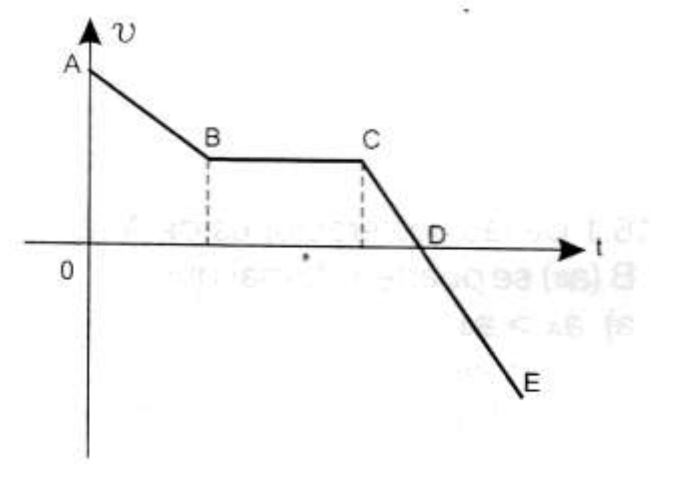
d) Ninguna.

17. En el gráfico siguiente se representa la variación de la velocidad (componente) de dos partículas A y B en función del tiempo. El área rayada representa:



a) La diferencia de las aceleraciones de los dos móviles.
b) La suma de las distancias recorridas por los dos móviles.
c) La diferencia entre los espacios recorridos por los dos móviles.
d) Ninguna.

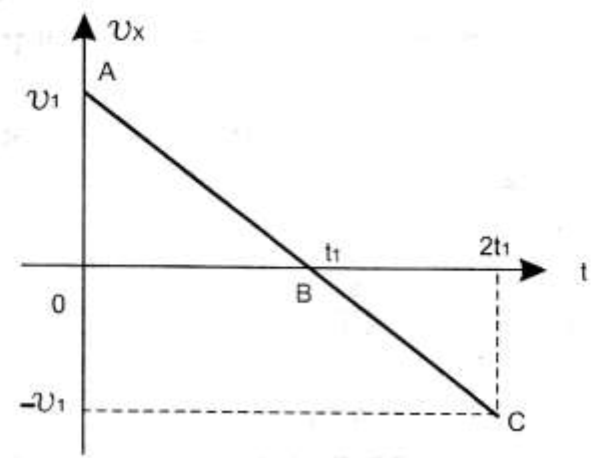
18. En el gráfico siguiente se representa la variación de la velocidad de un punto material en función del tiempo:



18.1 Se puede afirmar que:
a) El movimiento es retardado en los tramos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$.
b) El movimiento únicamente es retardado en $\overline{AB}$.
c) El movimiento es retardado en los tramos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
d) Ninguna.

18.2 Para este movimiento se cumple que:
a) En ningún instante la velocidad es nula.
b) El movimiento es uniforme en el tramo $\overline{BC}$.
c) El movimiento es retardado en el tramo $\overline{DE}$.
d) Ninguna.

19. En el siguiente gráfico se representa (υ_x .x t) para una partícula, y se cumple que:



a) La velocidad media entre t = 0 y t = 2t, es nula.
b) La velocidad media es igual a $\upsilon m = t_1 . \upsilon_1$
c) En el tramo $\overline{AB}$, la partícula se mueve hacia la izquierda.
d) Ninguna.

20. Con relación al gráfico de la pregunta 19, en el punto B:

a) La aceleración es nula.
b) La partícula invierte el signo de la aceleración.
c) La partícula invierte el sentido de movimiento.
d) Ninguna.

21. Se deja caer una moneda desde una cierta altura y llega al suelo en un tiem-

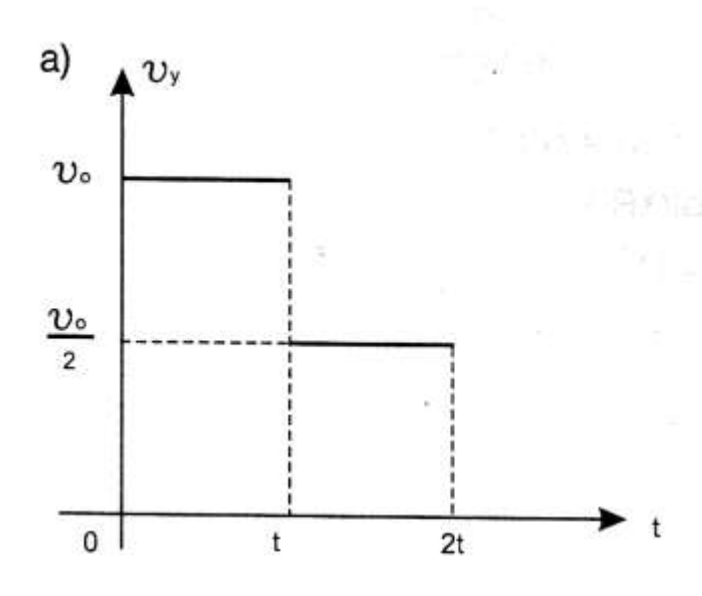
po t. Si se dejara caer de una altura igual a la cuarta parte de la inicial, el tiempo en llegar al suelo sería:

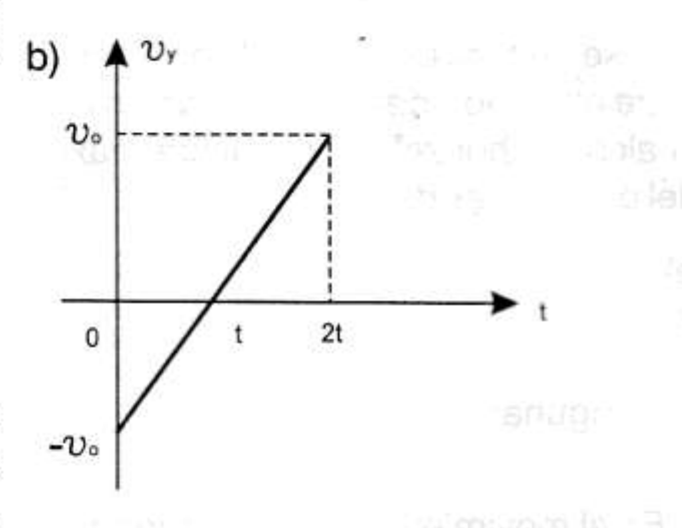
a) t/2
b) t/4
c) $\sqrt{t}$
d) Ninguna.

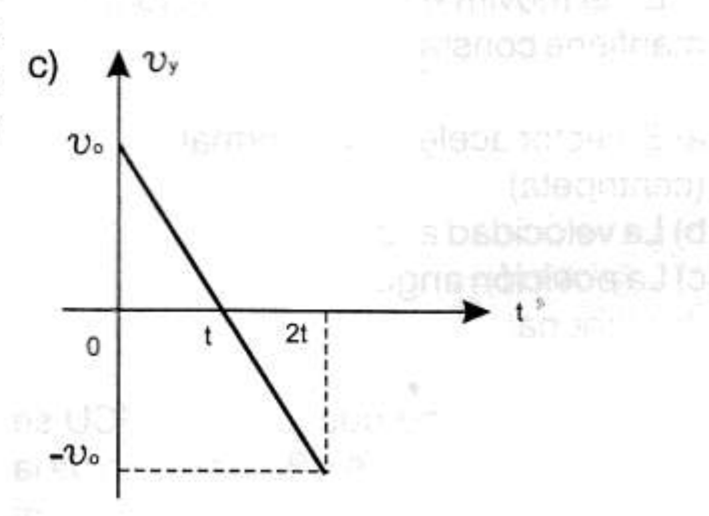
22. Una bola de vidrio se deja caer desde una determinada altura sobre una mesa horizontal y, luego de impactar en ésta, rebota hasta una altura igual a la cuarta parte de la inicial. La relación de los módulos de velocidad de la bola al llegar a la mesa y al abandonarla es:

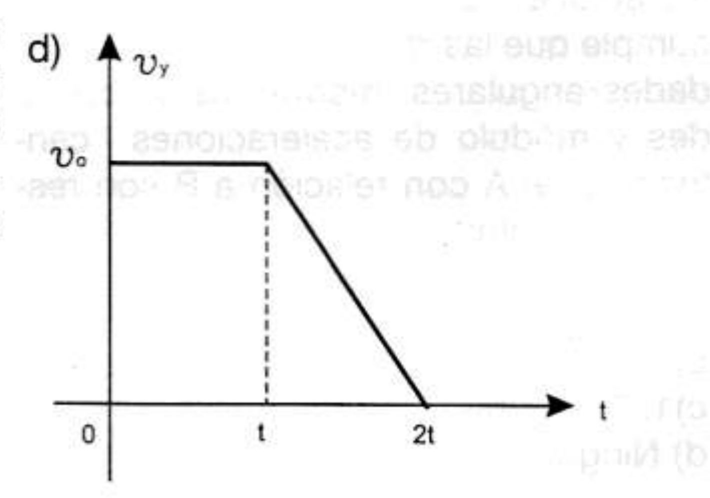
a) 1/2
b) 1/4
c) 4
d) Ninguna.

23. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba, despreciando la resistencia del aire. ¿Cuál es el gráfico que mejor representa la variación de la velocidad (componente) en función del tiempo, desde el lanzamiento hasta que regresa al punto de partida?

a)


b)


c)


d)


24. En un movimiento parabólico cualquiera, se mantiene constante:

a) La componente de la velocidad en el eje horizontal x.
b) El módulo de la velocidad.
c) La aceleración.
d) Ninguna.

25. Si se dispara un proyectil con un ángulo de elevación de 45° , la relación entre el alcance horizontal y la altura máxima del proyectil es de:

a) 4
b) 1
c) $\sqrt{2}$
d) Ninguna.

26. En el movimiento circular uniforme, se mantiene constante:

a) El vector aceleración normal (centrípeta).
b) La velocidad angular.
c) La posición angular.
d) Ninguna.

27. Sobre un disco que gira con MCU se marcan dos puntos A y B. Si el radio de la trayectoria A (R_A) es el doble de la trayectoria de B (R_B), $R_A = 2 R_B$, se cumple que las relaciones de las velocidades angulares, módulo de velocidades y módulo de aceleraciones centrípetas de A con relación a B son respectivamente:

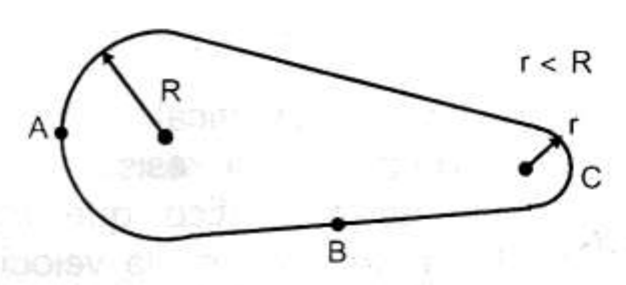
a) 2; 2; 1
b) 1; 2; 1
c) 1; 2; 2
d) Ninguna.

28) En el movimiento circular uniformemente variado de una partícula, se mantiene constante:

a) El vector aceleración tangencia!.
b) La aceleración total.
c) La aceleración angular.
d) Ninguna.

29. Una partícula se desplaza por la trayectoria de la figura con rapidez constante (módulo de la velocidad constante). Con relación al módulo de la aceleración en los puntos A, B Y C, se podría afirmar que:

a) $a_A = a_B = a_C = 0$
b) $a_A = a_C ; a_B = 0$
c) $a_C > a_A > a_B$
d) Ninguna.



30. Una partícula se desplaza con MCUV de aceleración angular α sobre una trayectoria de radio R. Si parte del reposo el módulo de la aceleración total en función del tiempo es:

a) $\alpha R + \alpha^2 t^2 R$
b) $\alpha R \sqrt{1+\alpha^2 t^4}$
c) $\alpha^2 t^2 R$
d) Ninguna.

3. DINÁMICA

3.1 FUERZAS

La Dinámica tiene por objeto estudiar el movimiento de un cuerpo, relacionándolo con las causas que lo generan. Estas causas son el resultado directo de la interacción del cuerpo analizado con otros que lo rodean, y son bien definidas por un concepto matemático denominado fuerza, que tiene características vectoriales.

Los efectos que produce la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo, generalmente son deformaciones y, o, movimiento. El movimiento puede ser de traslación o de rotación, o ambos a la vez. Si consideramos al cuerpo como una partícula (punto material), el único movimiento es el de traslación.

En este capítulo se analizará la dinámica de una partícula con relación a la traslación rectilínea y circular.

NATURALEZA DE LAS FUERZAS. La fuerza mide el grado de interacción entre dos cuerpos. La interacción puede ser de diversas formas: a distancia, por contacto, nuclear, etc. Todas estas interacciones naturales originan únicamente cuatro tipos de fuerzas; gravitacionales, electromagnéticas, nucleares fuertes y nucleares débiles.

- **FUERZA GRAVITACIONAL.** Es la atracción que ejercen entre sí dos cuerpos, a causa de sus masas. Generalmente la masa de un cuerpo es la cantidad de substancia que tiene, aunque en Física, y particularmente en Dinámica, tiene otra interpretación, que se tratará posteriormente.

- **FUERZA ELECTROMAGNÉTICA.** La producida por un cuerpo cargado eléctricamente, ya sea que esté en reposo o en movimiento. Si está en reposo, sólo se genera una fuerza eléctrica; si el cuerpo cargado se mueve, además de la fuerza eléctrica, se genera una fuerza magnética.

- **FUERZA NUCLEAR FUERTE**. Es la responsable de mantener unidos los protones y neutrones en el núcleo atómico. Esta fuerza no obedece a ninguna ley conocida, sino que decrece rápidamente, hasta prácticamente anularse cuando la distancia entre los cuerpos es mayor a 10^{-15} m

• **FUERZA NUCLEAR DÉBIL**. Es de naturaleza y característica diferente a la anterior, a pesar de que también se origina a nivel nuclear. Esta fuerza tampoco cumple una ley establecida y se encuentra en el fenómeno físico de la radiación.

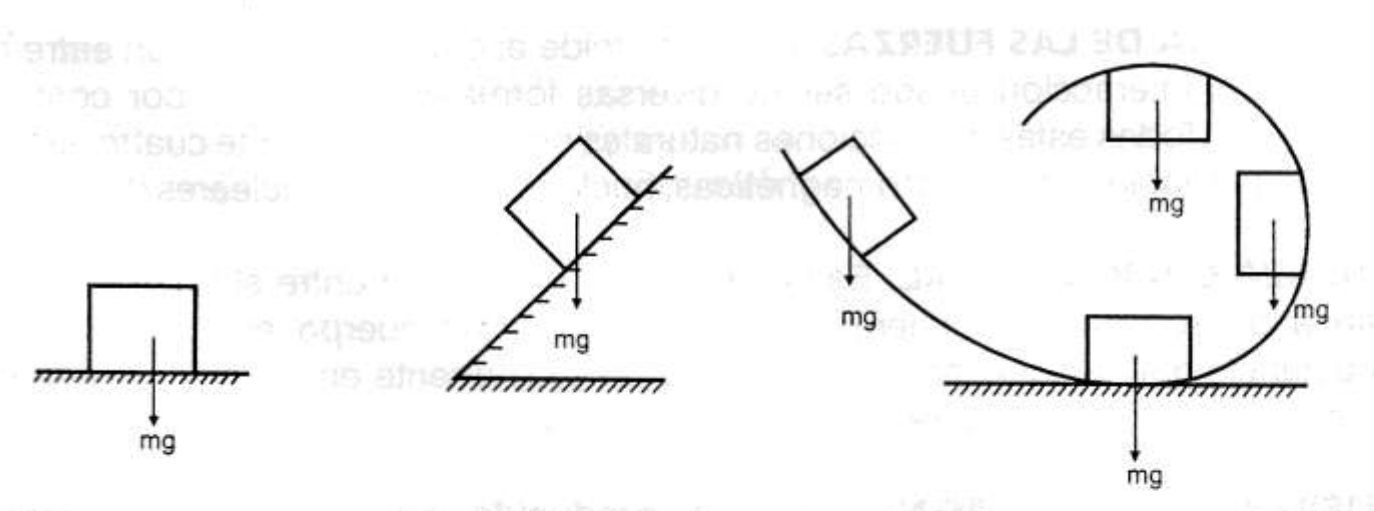
En casi toda actividad se puede advertir la presencia de fuerzas, de las cuales son analizadas en la Dinámica:

- Peso
- Normal
- Fricción o rozamiento
- Elástica
- Tensión

EL PESO. Es la fuerza con que la Tierra atrae a todos los cuerpos. Está dirigida hacia el centro del planeta, en virtud de lo cual para un observador en la superficie de la Tierra, el peso es una fuerza vertical dirigida hacia abajo (perpendicular a la horizontal).

El valor del peso de un cuerpo es:

$\vec{Peso} = m\vec{g}$, donde: m = masa del cuerpo **(3.1.1)**
$\vec{g}$ = aceleración de la gravedad.



El ***peso*** hace que todos los cuerpos caigan siempre en dirección hacia el centro de la Tierra.

La ***masa m*** de un cuerpo es la cantidad de materia que lo forma, la cual es constante y no presenta variación alguna de un lugar a otro.

La ***aceleración de la gravedad g*** no es la misma en todos los lugares del mundo; hay pequeñas variaciones de un lugar a otro, razón por la cual el peso de un cuerpo varía de acuerdo con el lugar.

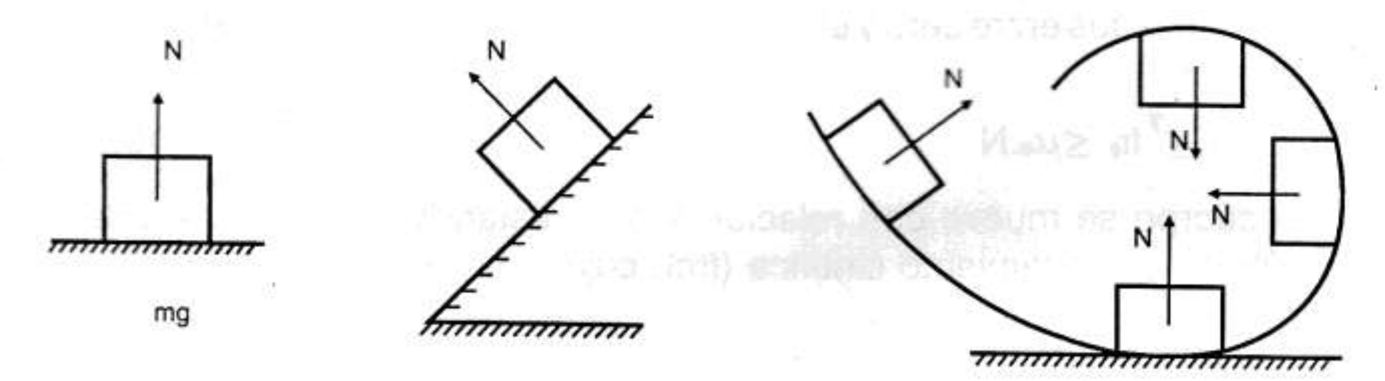
La Tierra no es esférica; es achatada en los polos y se comporta como si todo su poder de atracción estuviera acumulado en su centro. Esto hace que cuando más cerca de él esté un cuerpo, mayor será su peso. En los lugares donde g tiene un valor elevado, los pesos son mayores.

Por ejemplo, el peso de un cuerpo es mayor en los polos ($g = 9{,}82\ m/s^2$) que en el ecuador ($g = 9{,}77\ m/s^2$).

La aceleración de la gravedad en la Luna es 1/6 de la correspondiente en la Tierra, es decir, un cuerpo pesa en la Luna 1/6 de su peso en la Tierra.

No se debe confundir masa con peso, porque la masa es una cantidad escalar, mientras que el peso es una cantidad vectorial.

NORMAL. Es una fuerza que se genera cuando dos cuerpos están en contacto. Tiene una dirección perpendicular a las superficies en contacto.



En algunos casos, el valor de la fuerza normal es igual al del peso, pero eso no significa que estas fuerzas siempre cumplan algún tipo de relación. Son diferentes; su origen las diferencia.

FUERZA DE ROZAMIENTO. Se genera cuando dos cuerpos están en contacto y el uno tiende a moverse o se mueve con relación al otro. Tiene una dirección tangente a las superficies en contacto y su sentido sobre cada cuerpo es el opuesto al movimiento relativo o a su tendencia en relación con el otro.

La fuerza de rozamiento se origina básicamente debido a las rugosidades superficiales de los cuerpos en contacto. A pesar de que a simple vista nos puedan parecer totalmente lisos, si se los ve al microscopio, se tendrá algo como lo que se esquema tiza en esta figura:

La fuerza de rozamiento se denomina estática o dinámica, según si los cuerpos entre sí, tiendan a moverse o se muevan.

Si un cuerpo tiende a moverse sobre otro, es porque sobre él actúa una fuerza que produce tal tendencia. La fuerza de rozamiento que en esas condiciones se genera, es la fuerza de rozamiento **estática** (fr_e) y su valor es igual al de la que ocasiona la tendencia, pero de sentido opuesto. Es claro entonces que será variable, pero debe tener un valor como máximo, luego de lo cual definitivamente el cuerpo se mueve en relación con el otro.

El valor de la fuerza de rozamiento estática máxima es:

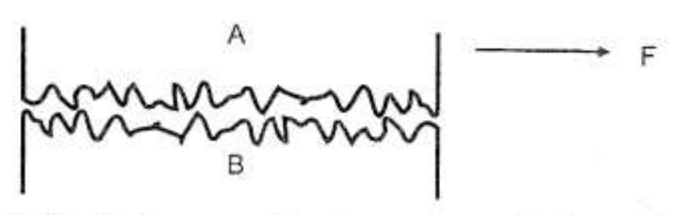
$fr_e(máx) = \mu_e.N$, donde **(3.1.2)**
μ_e = coeficiente de rozamiento estático y ,
N = reacción normal entre los cuerpos en contacto.

De lo anterior se concluye que la fuerza de rozamiento estática es variable, y toma valores comprendidos entre cero y el valor de la fuerza de rozamiento estática máxima, (μ_e.N), es decir:

$$0 \leq fr_e \leq \mu_e.N \quad \textbf{(3.1.3)}$$

Cuando el cuerpo se mueve con relación a otro, estando los dos en contacto, se genera la fuerza de rozamiento cinética (frc), cuyo valor es constante dentro de un cierto rango de velocidades.

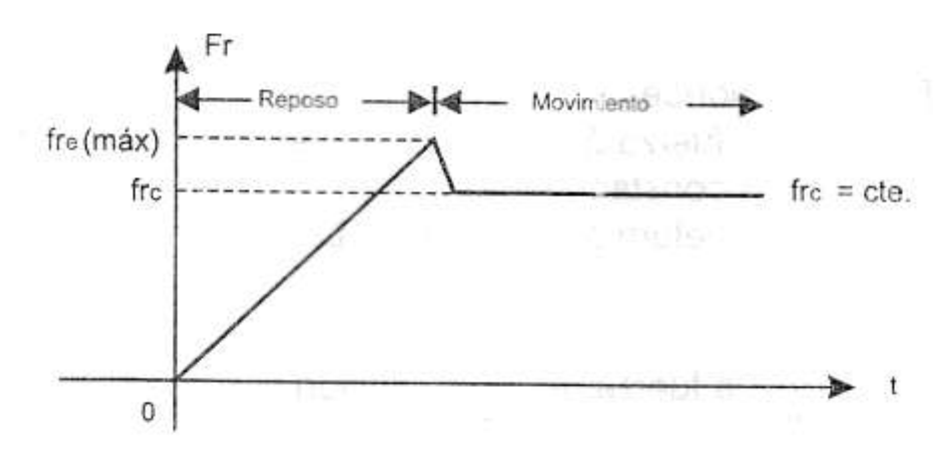
$fr_c(máx) = \mu_c N$, donde **(3.1.4)**
μ_c = coeficiente de rozamiento cinético y ,
N = reacción normal entre los cuerpos en contacto.



Al aplicar progresivamente la fuerza F al cuerpo A, los picos de éste que están enclavados en los valles de B, soportan una oposición lateral, paralela a las superficies de contacto, que impedirán el movimiento. Al aumentar el valor de F, también lo hará el de la fuerza de oposición, pero hasta un valor límite, donde el movimiento es inminente. En ese instante la fuerza de rozamiento estática tiene su máximo valor (μ_e.N).

A partir de allí, si aumenta F, el cuerpo A se mueve con relación a B y el contacto entre los cuerpos es ya sólo a nivel de los picos, lo cual disminuye la oposición. Esto además permite explicar por qué el coeficiente de rozamiento estático (μ_e) es ligeramente mayor que el coeficiente de rozamiento cinético (μ_c).

Para estas condiciones, que F aumenta gradualmente en función del tiempo, la fuerza de rozamiento cumple aproximadamente con el siguiente gráfico:

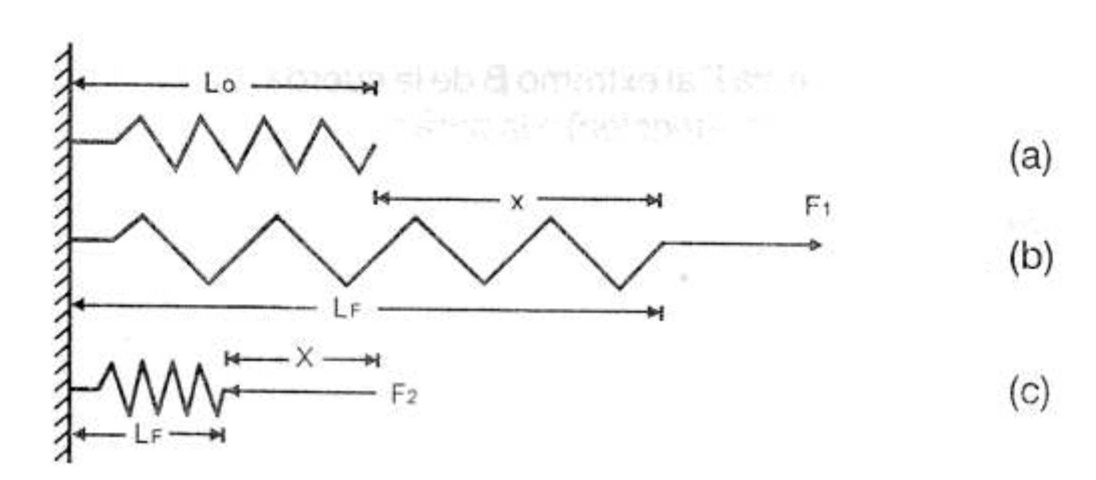


En algunos materiales, el coeficiente de rozamiento estático (μ_e) y el cinético (μ_c) son prácticamente iguales; en esos casos se considera que μ es único.

FUERZA ELÁSTICA. Un cuerpo se denomina elástico cuando bajo la acción de fuerzas - dentro de ciertos límites - se deforma, pero al retirar el agente de deformación, el cuerpo regresa a sus condiciones iniciales de forma y tamaño. La fuerza que lleva a restituir al cuerpo sus condiciones iniciales (naturales), se denomina fuerza elástica, la cual es directamente proporcional a la deformación. La fuerza elástica y la deformación tienen sentidos opuestos.

En Dinámica, un modelo frecuente para el análisis de la fuerza elástica lo constituye el resorte.

Si a un resorte de longitud natural (L_o = longitud sin deformar), fig (a), se le aplica una fuerza F_1 , se deforma alargándose, fig (b); pero en el resorte se genera una fuerza elástica F_e que tenderá a volverlo a la posición inicial.



Si se comprime el resorte mediante la aplicación de la F_2 . fig (c), tratará de volver a su longitud natural, al generar una fuerza elástica F_e hacia tal posición.

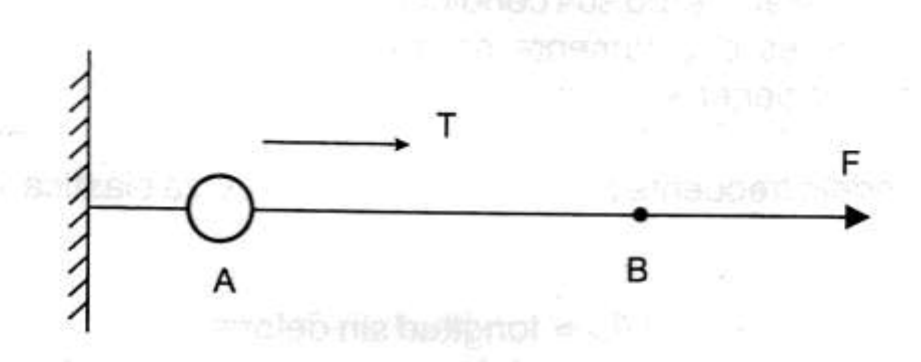
En conclusión. la fuerza elástica siempre estará dirigida hacia la posición en que el resorte no está deformado, y su valor depende de la variación de la longitud del resorte con relación a su longitud natural. Matemáticamente, esto se expresa:

$$F_e = -kx, \text{ donde} \qquad (3.1.5)$$

F_e = fuerza de recuperación elástica
k = constante del resorte
x = deformación ($x = L_F - L_o$)

El signo menos indica que la fuerza de recuperación tiene sentido opuesto al de la deformación.

TENSIÓN DE UNA CUERDA. La cuerda es un elemento flexible que sirve para transmitir la acción de una fuerza aplicada. En condiciones ideales la fuerza transmitida es la misma en cualquier sección de la cuerda, o sea que, la fuerza no se pierde.



La aplicación de una fuerza F al extremo B de la cuerda, determina que en el punto A la cuerda transmita una fuerza (tensión) a la pared.

Las cuerdas siempre transmiten fuerzas de tensión (tracción) sobre el cuerpo al cual están unidas.

3.2 LEYES DE NEWTON

Las características del movimiento de una partícula están determinadas por las características de la fuerza neta o resultante que actúa sobre ella, y su interrelación está descrita por las leyes del movimiento de Newton.

Las leyes fundamentales del movimiento son tres. Se las conoce como las Leyes de Newton, en honor a quien las formuló y publicó en 1687, Isaac Newton, en su libro *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis.*

PRIMERA LEY DE NEWTON. Conocida también como Ley de la Inercia o Ley de la Estática.

Dice: ***Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de MRU, a menos que se le obligue a cambiar ese estado por medio de fuerzas que actúan sobre él.***

Se denomina **Ley de la Inercia** porque el cuerpo por sí mismo permanece en reposo o en MRU y si experimenta un cambio en su velocidad (aceleración), en contra de su tendencia a permanecer en reposo o en MRU, es porque sobre él actúa una fuerza neta exterior que le obliga a cambiar de estado.

La oposición que presenta todo cuerpo a un cambio en su estado de reposo o movimiento, se llama inercia, que es cuantificada por la masa del cuerpo. Cuanto mayor es la masa, mayor es la inercia.

También esta primera Ley se denomina Ley del Equilibrio o de la Estática, porque a estos estados corresponde la condición de que la aceleración es nula.

SEGUNDA LEY DE NEWTON: Conocida también como Ley de la Dinámica o Ley de la Fuerza:

La aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza Neta que actúa sobre él, e inversamente proporcional al valor de su masa.

$$\vec{a} \; \alpha \; \frac{\vec{F}}{m}$$

$\vec{F} = m.\vec{a}$, donde:

$\vec{a}$ = aceleración
m = masa del cuerpo
$\vec{F}$ = fuerza neta

(3.2.1)

La fuerza neta es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección y sentido de la aceleración: $(\vec{u}_F = \vec{u}_a)$.

La fuerza neta es la fuerza resultante, igual a la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 ..... \qquad (3.2.2)$$

$$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a} \qquad (3.2.3)$$

De este análisis se puede deducir que la primera Ley de Newton es un caso particular de la segunda, en la cual la aceleración es nula:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \text{ (primera Ley de Newton)}$$
$$\vec{a} = 0 \qquad (3.2.4)$$

UNIDADES: La fuerza es una magnitud vectorial, cuyas unidades son las de una masa multiplicada por las de aceleración:

En el SI:

$m.\vec{a} = \vec{F}$

$1\,[Kg.].1[m/s^2] = 1[1N]$ (Newton)

1 Newton es la fuerza que produce una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 kg.

En el CGS:

$m.\vec{a} = \vec{F}$

$1\,[\,g\,].1[cm/s^2] = 1[dina]$

1 Dina es la fuerza que produce una aceleración de 1 cm/s^2 a una masa de 1 g.

En el Técnico:

$m.\vec{a} = \vec{F}$

$1\,[utm].1[m/s^2] = 1[Kgf]$ (Kilogramo - fuerza)

1 kilogramo-fuerza es la fuerza que produce una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 utm

En el Inglés:

$m.\vec{a} = \vec{F}$

$1\,[slug].1[pie/s^2] = 1[lgf]$ (libra- fuerza)

1 libra-fuerza es la fuerza que produce una aceleración de 1 pie/s^2 a una masa de 1 slug.

EQUIVALENCIAS:

$1[Kg] = 10^3[g]$

$1[utm] = 9{,}8\,[kg]$

$1[slug] = 14{,}59\,[kg]$

$1[N] = 1[kg].1[m/s^2]$

$1[N] = 10^3[g].10^2[cm/s^2]$

$1[N] = 10^5[dinas]$

$1[k_gf] = 1[utm].\ 1[m/s^2]$

$1[k_gf] = 9{,}8\ [kg].1[m/s^2]$

$1[k_gf] = 9{,}8[N]$

$1[lbf] = 1[slug].1[pie/s^2]$

$1[lbf] = 14{,}59\ [kg].0{,}3048\ [m/s^2]$

$1[lbf] = 4{,}45[N]$

DIMENSIONES:

$\vec{F} = m.\vec{a}$

$[F] = [M].[L.T^{-2}]$

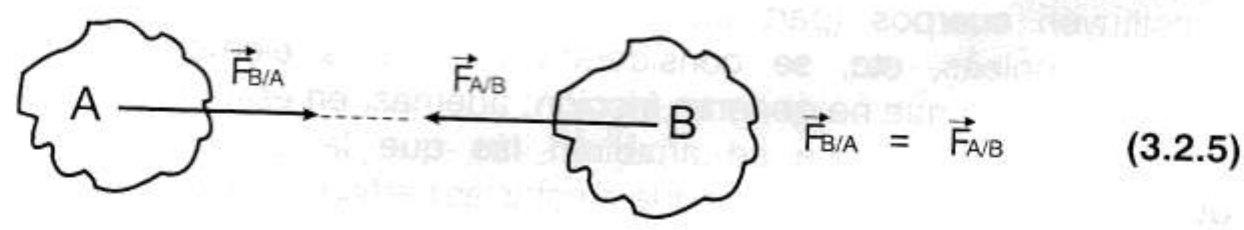
$[F] = [M.L.T^{-2}]$

TERCERA LEY DE NEWTON. **Conocida como Ley de Acción y Reacción:**

Cuando dos cuerpos interactúan, la fuerza que el primero ejerce sobre el segundo (acción), es igual a la que éste ejerce sobre el primero (reacción) en módulo y dirección, pero en sentido opuesto.

Es conveniente aclarar que las fuerzas de acción y reacción están aplicadas en cuerpos diferentes, es decir que en el uno actúa la acción y en el otro la reacción. Esto significa que los efectos sobre cada cuerpo serán diferentes, ya que dependerán de que otras fuerzas actúan sobre cada uno, o del valor de las masas.

Por ejemplo, si los cuerpos A y B de la figura interactúan, la fuerza que el cuerpo A ejerce sobre el cuerpo B ($F_{A/B}$) es igual y opuesta a la que el cuerpo B ejerce sobre el cuerpo A:($F_{B/A}$):



$$\vec{F}_{B/A} = \vec{F}_{A/B} \qquad (3.2.5)$$

Sin embargo, estas fuerzas no se anulan porque actúan en cuerpos diferentes.

Con la aplicación de las Leyes de Newton, se puede analizar el movimiento de las partículas, interrelacionándolas con las causas que lo generan.

CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA. Según la primera Ley de Newton, una partícula está en equilibrio (reposo o MRU) cuando la fuerza neta que actúa sobre ella es nula, condición única para que una partícula esté en equilibrio:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \qquad (3.2.6)$$

Pero como la fuerza puede tener componentes en los diferentes ejes, entonces se tiene:

$$\Sigma Fx = 0 \quad y \qquad (3.2.7)$$

$$\Sigma Fy = 0 \qquad (3.2.8)$$

Si en un problema se tienen varias partículas en equilibrio, estas condiciones se aplican a cada una de ellas.

REGLAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE DINÁMICA. En la resolución de problemas de Dinámica, es necesario tener mucho orden, para lo cual es conveniente tomar en cuenta algunas reglas útiles que faciliten los análisis:

1. Se aisla el o los cuerpos de interés.
2. Se elige un sistema de referencia ortogonal adecuado para el análisis del movimiento de cada cuerpo. El sistema debe tener un eje que coincida con la dirección de la aceleración del cuerpo.
3. Se representan vectorialmente todas las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo, teniendo en cuenta primeramente su peso. Cada fuerza se representa por un vector cuyo origen parte del cuerpo, que es considerado como un punto (partícula). Las fuerzas que no coincidan con las direcciones de los ejes, se proyectarán sobre éstos para encontrar sus componentes. Como los movimientos a analizar están contenido en un plano , será ,suficiente calcular las componentes de las fuerzas en los ejes x (Fx) e y (Fy).
4. Se plantea la segunda Ley de Newton en cada eje del sistema de coordenadas, obteniéndose generalmente un sistema de ecuaciones. Si el sistema analizado lo constituyen cuerpos (partículas) interconectados entre sí mediante cuerdas, resortes, poleas, etc, se considerará que estos elementos poseen masas despreciables y que no generan fricción; además, en este caso, a las ecuaciones obtenidas anteriormente se añadirán las que la geometría del movimiento determine. Esto último significa que al estar las partículas interconectadas entre sí, el movimiento de una de ellas determina características en el movimiento de la o las otras, estableciéndose así una relación entre sus aceleraciones.
5. Resolver el sistema de ecuaciones que pennitan calcular las incógnitas y analizar los resultados.

EJEMPLOS

1. A un móvil de 1500 kg que va por una carretera recta se le aplica una fuerza constante de, 3000 [N] durante 10 s, en la misma dirección del movimiento, luego de lo cual adquiere una velocidad de 180 km/h. Determinar:

a) La aceleración del móvil.
b) Qué velocidad tenía el móvil antes de ser aplicada la fuerza.
c) El espacio recorrido en los 10 s

a) $\sum F = m.a \Rightarrow a = \frac{\sum F}{m} = \frac{300[N]}{1500\ kg} = 2m/s^2$

$\upsilon = 180\ km/h = 50m/s$

b) $\upsilon = \upsilon_o + a.\Delta t$
$\upsilon_o = \upsilon - a.\Delta t$
$\upsilon_o = 50m/s - 2m/s\ .10s$
$\upsilon_o = 50m/s - 20m/s$
$\upsilon_o = 30\ m/s$

c) $\Delta r = \upsilon_o.\Delta t + \frac{1}{2}a.\Delta t^2$
$\Delta r = (30m/s)10s + \frac{1}{2}(2m/s^2)(100\ s^2)$
$\Delta r = 300m + 100m$
$\Delta r = 400\ m$

2. Un cuerpo de 10 kg está en reposo en el origen de coordenadas. Si en t = 0 s se le aplica una $\vec{F} = (25\vec{i} - 46\vec{j})[N]$, determinar:

a) La posición del cuerpo en t = 10 s.
b) La velocidad del cuerpo t = 15 s.

a) Las componentes de la posición son:

$\sum F_x = m.a_x \Rightarrow a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{25[N]}{10\ kg} = 2,5m/s^2$

c) $r_x = \cancelto{0}{\upsilon_{ox}.\Delta t} + \frac{1}{2}a_x.\Delta t^2$
$r_x = \frac{1}{2}(2,5m/s^2)(100s^2)$
$r_x = 125\ m$

$\sum F_y = m.a_y \Rightarrow a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{-46[N]}{10\ kg} = -4,6m/s^2$

$r_y = \cancelto{0}{\upsilon_{oy}.\Delta t} + \frac{1}{2}a_y.\Delta t^2$
$r_y = \frac{1}{2}(-4,6m/s^2)(100s^2)$
$r_y = -230\ m$

La posición del cuerpo
$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$
$\vec{r} = (125\vec{i} - 230\vec{j})$

b) Las componentes de la velocidad son:

$\upsilon_x = \upsilon_{ox}^{\,0} + a_x.\Delta t$
$\upsilon_x = 2{,}5m/s^2.15\ s$
$\upsilon_x = 37{,}5m/s$

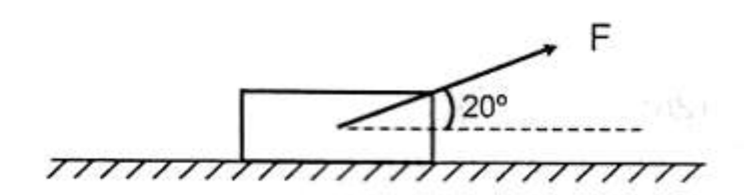
$\upsilon_y = \upsilon_{oy}^{\,0} + a_y.\Delta t$
$\upsilon_y = (-4{,}6m/s^2).15\ s$
$\upsilon_y = -69m/s$

La velocidad es:

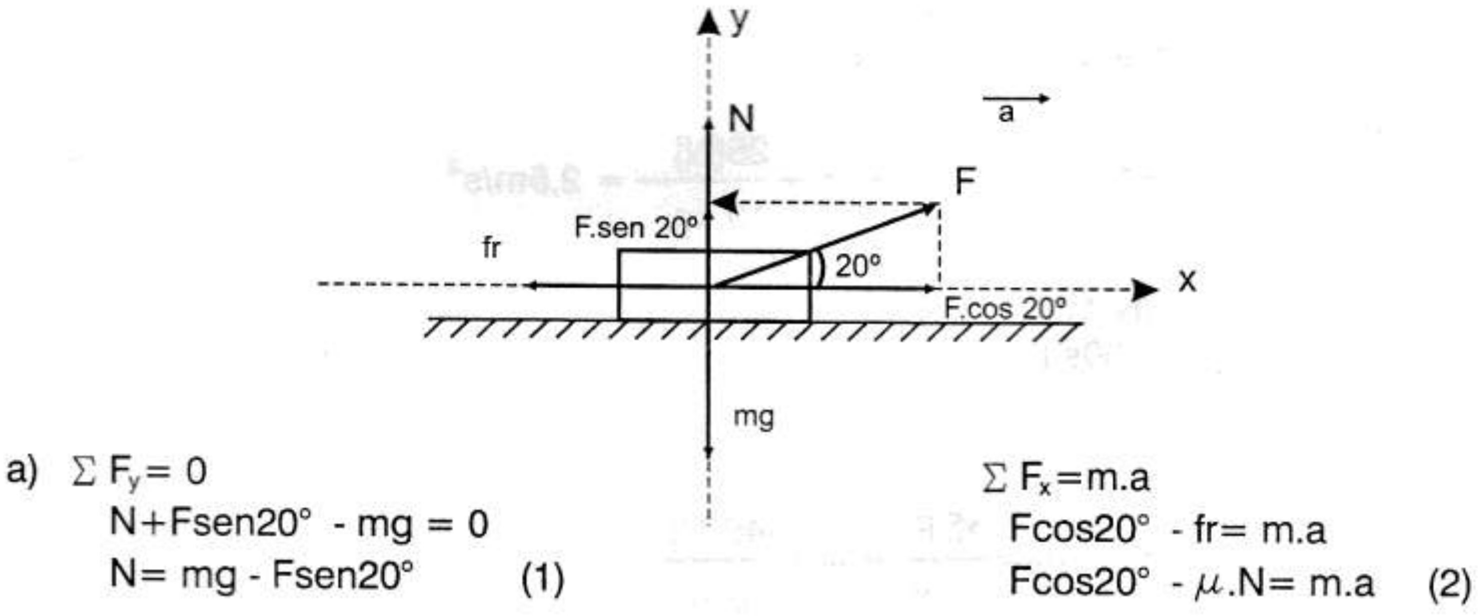
$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j}$

$\vec{\upsilon} = (37{,}5\vec{i} - 69\,\vec{j})m/s$

3. En la figura, si el cuerpo es de 30 kg y el coeficiente de rozamiento cinético es 0,2, determinar:



a) Cuál es el valor de la aceleración del cuerpo si F = 100[N]
b) Qué valor debe tener la fuerza, para que el cuerpo se mueva con velocidad constante.
c) Qué valor debe tener la fuerza, para que el cuerpo se mueva con una aceleración de 1,5 m/s.



a) $\Sigma F_y = 0$

$N + Fsen20° - mg = 0$

$N = mg - Fsen20°$ (1)

$\Sigma F_x = m.a$

$Fcos20° - fr = m.a$

$Fcos20° - \mu.N = m.a$ (2)

Reemplazando (1) en (2):

$Fcos20° - \mu(mg - Fsen20°) = m.a$

$Fcos20° - \mu mg + \mu Fsen20° = m.a$

$$a = \frac{F(\cos 20° + \mu \operatorname{sen} 20°) - \mu mg}{m} = \frac{100{,}81[N] - 58{,}8[N]}{30\ kg} = 1{,}4\ m/s^2$$

b) $\Sigma F_y = 0$

$N + F\operatorname{sen}20° - mg = 0$

$N = mg - F\operatorname{sen}20° \qquad (1)$

$\Sigma F_x = 0$, para que $v =$ cte.

$F\cos 20° - fr = 0$

$F\cos 20° - \mu.N = 0 \qquad (2)$

Reemplazando (1) en (2):

$F\cos 20° - \mu(mg - F\operatorname{sen}20°) = 0$

$F\cos 20° - \mu mg + \mu F\operatorname{sen}20° = 0$

$F(\cos 20° + \mu \operatorname{sen}20°) = \mu mg$

$$F = \frac{\mu mg}{\cos 20° + \mu.\operatorname{sen}20°} = \frac{0{,}2(30kg)(9{,}8\ m/s^2)}{\cos 20° + 0{,}2\operatorname{sen}20°} = 58{,}33[N]$$

c) $\Sigma F_y = 0$

$N + F\operatorname{sen}20° - mg = 0$

$N = mg - F\operatorname{sen}20° \qquad (1)$

$\Sigma F_x = m.a$

$F\cos 20° - fr = m.a$

$F\cos 20° - \mu.N = m.a \qquad (2)$

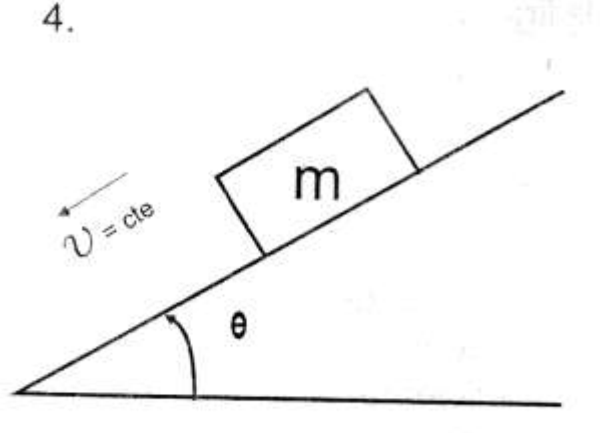
Reemplazando (1) en (2):

$F\cos 20° - \mu(mg - F\operatorname{sen}20°) = m.a$

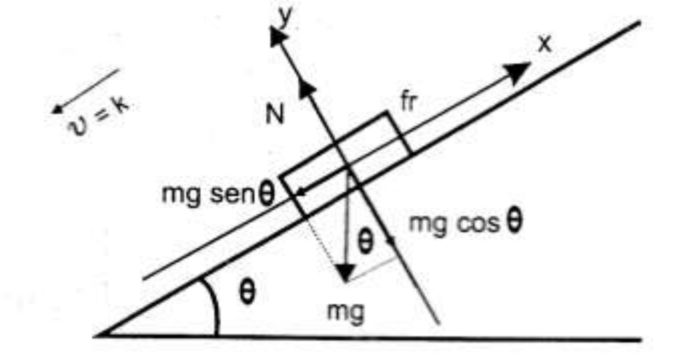
$F(\cos 20° + \mu\operatorname{sen}20°) - \mu mg = m.a$

$$F = \frac{m.a + \mu mg}{\cos 20° + \mu.\operatorname{sen}20°} = \frac{30kg(1{,}5m/s^2) + 0{,}2(30kg)(9{,}8\ m/s^2)}{\cos 20° + 0{,}2.\operatorname{sen}20°} = 102{,}97[N]$$

4.



Un bloque de masa ***m*** se desliza con velocidad constante hacia abajo en un plano inclinado, que forma un ángulo **θ** con la horizontal. Determinar el valor del coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano inclinado.



$\Sigma F_y = 0$

$N - mg.\cos\theta = 0$

$N = mg.\cos\theta$ (1)

$\Sigma F_x = 0$, para que se deslice con υ = cte.

$fr - mg.\text{sen}\,\theta = 0$

$\mu N = mg.\text{sen}\,\theta$ (2)

$$\mu = \frac{mg.\text{sen}\,\theta}{N}$$

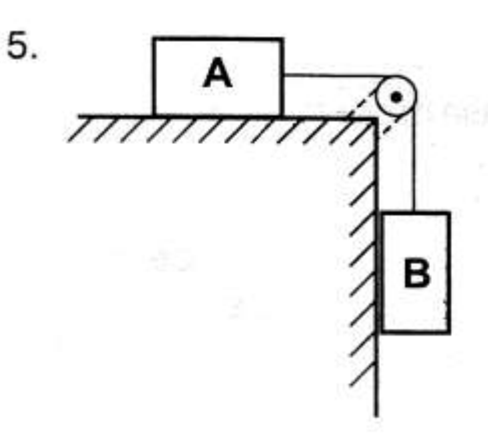
Reemplazando (1) en (2):

$$\mu = \frac{mg.\text{sen}\,\theta}{N}$$

$$\mu = \frac{mg.\text{sen}\,\theta}{mg.\cos\theta}$$

$$\mu = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

$$\mu = \text{tag}\,\theta$$

5. 

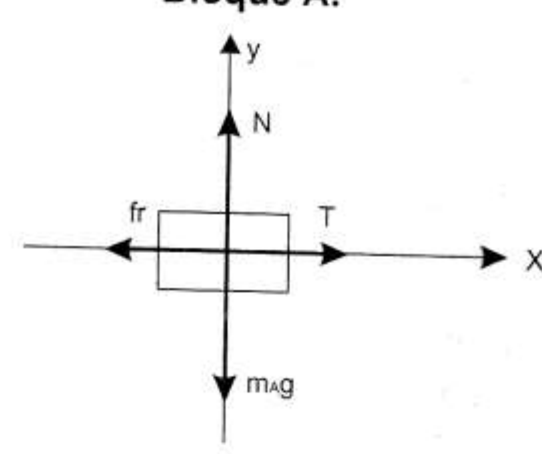
El sistema de la figura está en reposo cuando $m_A = 12$ kg y $m_B = 3$ kg. Determinar:

a) El valor de la tensión en la cuerda.

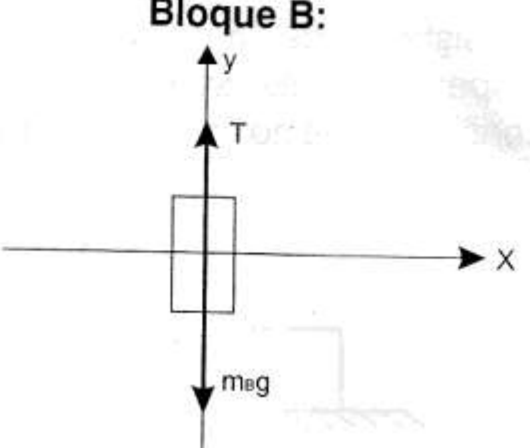
b) Qué fuerza de rozamiento actúa sobre el bloque A.

c) Cuál es el máximo valor de la masa del bloque B para que el sistema permanezca aún en equilibrio, si el coeficiente estático de rozamiento entre el bloque A y la superficie horizontal es 0,4.

Bloque A:



Bloque B:



a) **Bloque A:**

$\Sigma F_y = 0$

$N = m_A . g$

$N = 12\ kg . 9{,}8\ m/s$

$N = 117{,}6[N]$

$\Sigma F_X = 0$

$T - fr = 0$

$T = fr$ (1)

Bloque B:

$\Sigma F_y = 0$

$T - m_B . g = 0$

$T = m_B . g$ (2)

$T = 3kg . 9{,}8 m/s^2$

$T = 29{,}4[N]$

b) En la ecuación (1)

$fr = T$

$fr = 29{,}4[N]$

c) El sistema está a punto de moverse cuando la fuerza de rozamiento es la estática máxima:

$T = fr_{máx}$ (1)

$T = \mu_e . N$

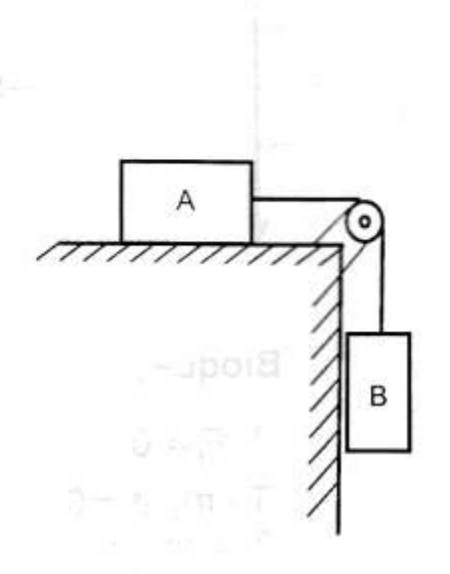
$T = 0{,}4 . 117{,}6[N]$

$T = 47{,}04[N]$

y en este caso el valor máximo de m_B es:

$$T = m_B . g \implies m_B = \frac{T}{g} = \frac{47{,}04[N]}{9{,}8\ m/s^2} = 4{,}8\ kg$$

6.El sistema de la figura consiste de dos bloques A y B de masas m_A y m_B respectivamente, sujetas por una cuerda inextensible de masa despreciable. Se considera que no hay fricción entre el plano horizontal y el bloque A:

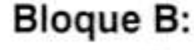


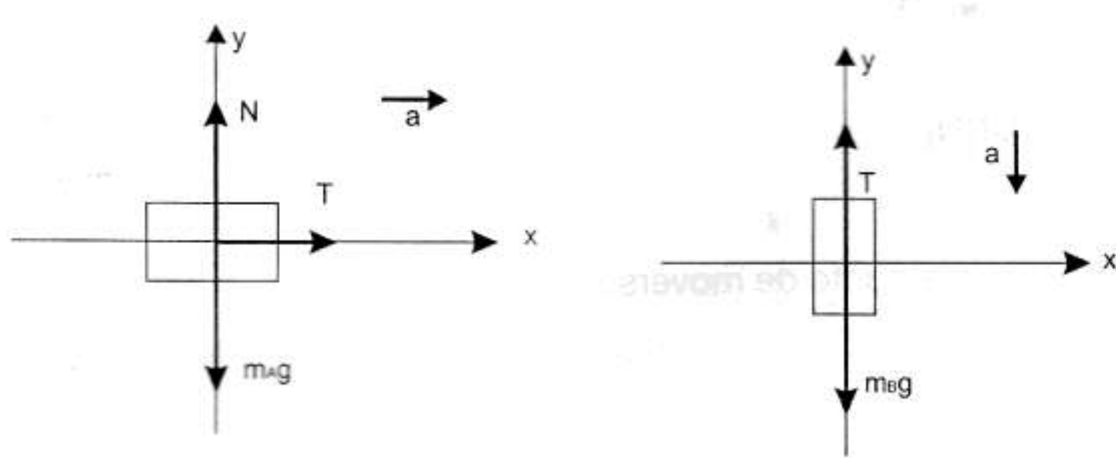
a) Si $m_A = 8kg$ y $m_B = 12$ kg y el sistema parte del reposo, determinar la aceleración de cada bloque y la tensión de la cuerda.

b) Si al inicio del movimiento, A se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 4m/s y llega a detenerse instantáneamente cuando se ha desplazado 3 m a partir de la posición inicial, determinar la relación (m_B/m_A).

c) Si el sistema parte del reposo, determinar la relación (m_B/m_A) para que la aceleración de los bloques sea la quinta parte del valor de la gravedad.

Bloque A: **Bloque B:**





a) **Bloque A:**

$\sum F_y = 0$

$N - m_A.g = 0$

$N = m_A.g$

$N = 8\ kg.9{,}8\ m/s$

$N = 78{,}4[N]$

$\sum F_x = m_A.a_A$

$T = m_A.a_A$ (1)

Bloque B:

$\sum F_y = 0$

$m_B.g - T = m_B.a_B$ (2)

Hasta el momento se tiene un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas (T, a_A, a_B), pero el movimiento de A no es independiente del movimiento de B, por lo que las características de su movimiento deben determinar las características del movimiento del otro. Esto sucede siempre que se analice el movimiento de partículas que están conectadas entre sí.

En este caso si A se mueve hacia la derecha una cierta distancia (d_A), B se moverá hacia abajo una distancia (d_B), pero como la cuerda es inextendible, $d_A = d_B$, en cada instante $v_A = v_B$ y $a_A = a_B$. De este análisis es de donde se obtiene la relación faltante para resolver el sistema:

$$a_A = a_B = a \qquad (3)$$

Entonces las ecuaciones anteriores serán:

$$T = m_A.a \qquad (1)$$
$$m_B.g - T = m_B.a \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$\begin{array}{c} T = m_A.a \\ m_B.g - T = m_B.a \\ \hline m_B.g = m_A.a + m_B.a \quad (3) \end{array}$$

$$a = \frac{m_B.g}{m_A + m_B} = \frac{12kg.9,8\ m/s^2}{8\ kg + 12\ kg} = 5,88\ m/s^2$$

Reemplazando en (1):

$$T = m_A.a$$
$$T = 8\ kg.5,88m/s^2$$
$$T = 47,04[N]$$

b) $v_o = 4m/s$
$d = 3m$
$v_f = 0$

$$\cancel{v_f^2}^{\,0} = v_o^2 - 2a_A.d_A \qquad a_A = \frac{v_o^2}{2d_A} = \frac{(4m/s)^2}{2(3m)} = 2,67\ m/s^2$$

Reemplazando este valor en la ecuación (3), tenemos:

$$m_B.g = m_A.a + m_B.a$$
$$m_B.g = m_B.a + m_A.a$$
$$m_B(g - a) = m_A.a$$

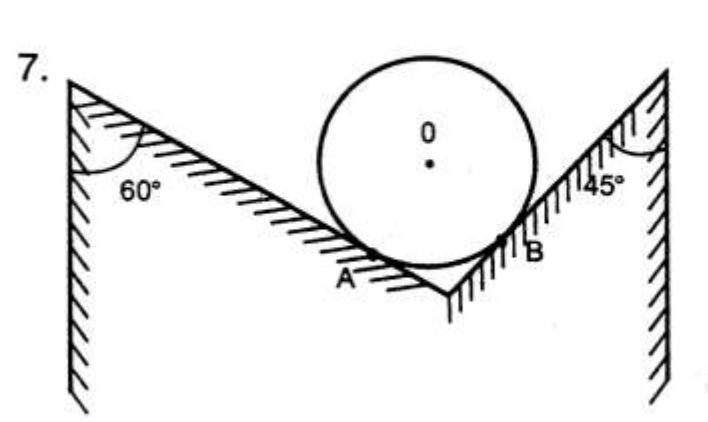
$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{a}{g - a} = \frac{2,67m/s}{9,8\ m/s - 2,67\ m/s^2} = 0,37$$

c) a= g/5, reemplazando este valor en (3):

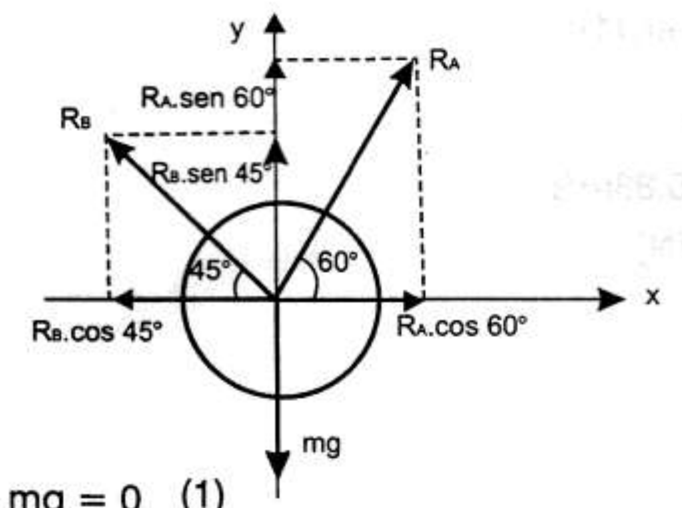
$$m_B.g = m_A.a + m_B.a$$
$$m_B.g - m_B.a = m_A.a$$
$$m_B(g - a) = m_A.a$$

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{a}{g - a} = \frac{g/5}{g - g/5} = \frac{1}{4}$$

7.



Una esfera de 30 kg se encuentra en equilibrio apoyada sobre dos planos lisos, como se indica en la figura. Determinar el valor de las reacciones que actúan sobre la esfera en los puntos de contacto de ésta con los planos.



$\Sigma F_y = 0$

$R_A.sen60° + R_B.sen45° - mg = 0$ (1)

$\Sigma F_x = 0$

$R_A.cos60° - R_B.cos45° = 0$ (2)

Sumando (1) y (2):

$$R_A.sen60° + R_B.sen45° - mg = 0$$
$$R_A.cos60° - R_B.cos45° = 0$$

$$R_A.(sen60° + cos60°) = mg$$

, puesto que sen45° = cos45°

$$R_A = \frac{mg}{\operatorname{sen}60° + \cos 60°}$$

$$R_A = \frac{30kg.9,8\ m/s}{\operatorname{sen}60° + \cos 60°}$$

$$R_A = 215,22[N]$$

Reemplazando R_A en (2):

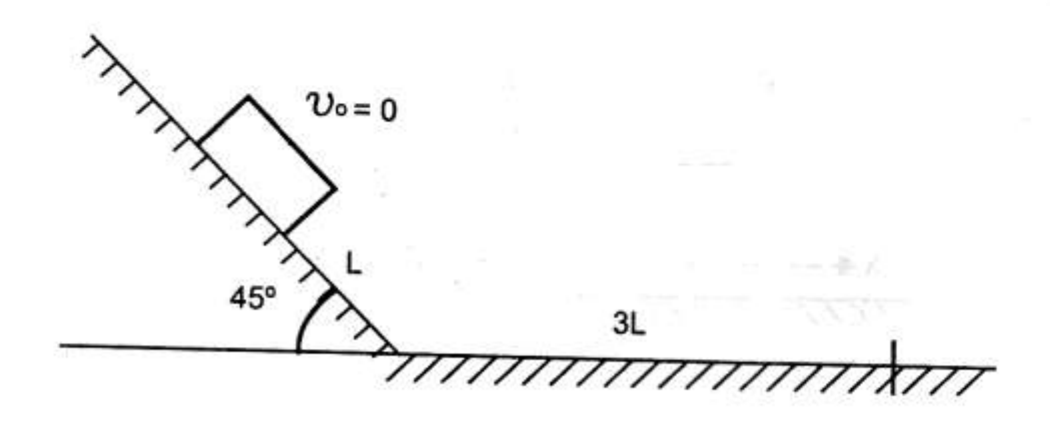
$$R_A.\cos 60° - R_B.\cos 45° = 0$$

$$R_B = \frac{R_A.\cos 60°}{\cos 45°}$$

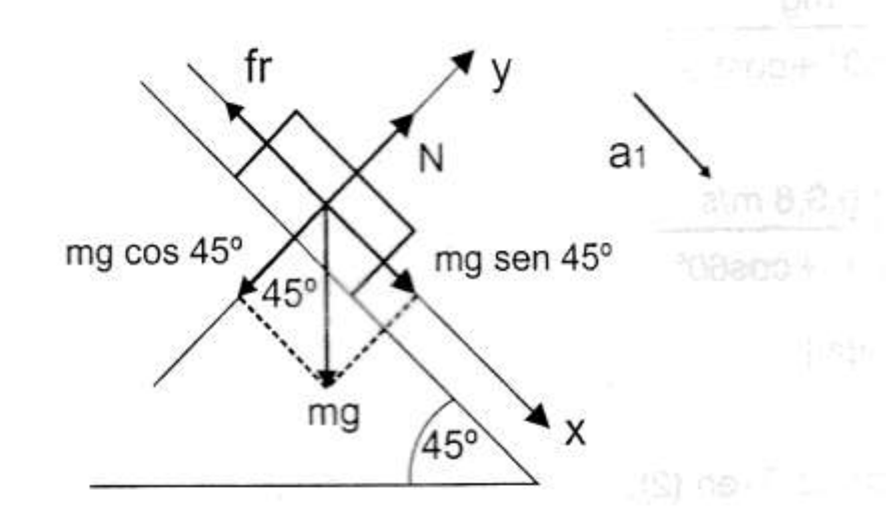
$$R_B = \frac{215,22[N]}{\cos 45°}$$

$$R_B = 152,18[N]$$

8. Un cuerpo se desliza: primero, a lo largo de un plano inclinado. un ángulo de 45° y luego continúa moviéndose sobre un plano horizontal hasta detenerse. Determinar el coeficiente de rozamiento, si se conoce que el cuerpo recorre en el plano horizontal el triple de la distancia que en el plano inclinado.



En el plano inclinado:



$\Sigma F_y = 0$

$N - mg.\cos45° = 0$

$N = mg.\cos45°$ (1)

$\Sigma F_x = m.a_1$

$mg.\text{sen}45° - fr = m.a_1$

$mg.\text{sen}45° - \mu N = m.a_1$ (2)

Reemplazando (1) en (2), tenemos que la aceleración es:

$mg.\text{sen}45° - \mu(mg.\cos45°) = m.a_1$

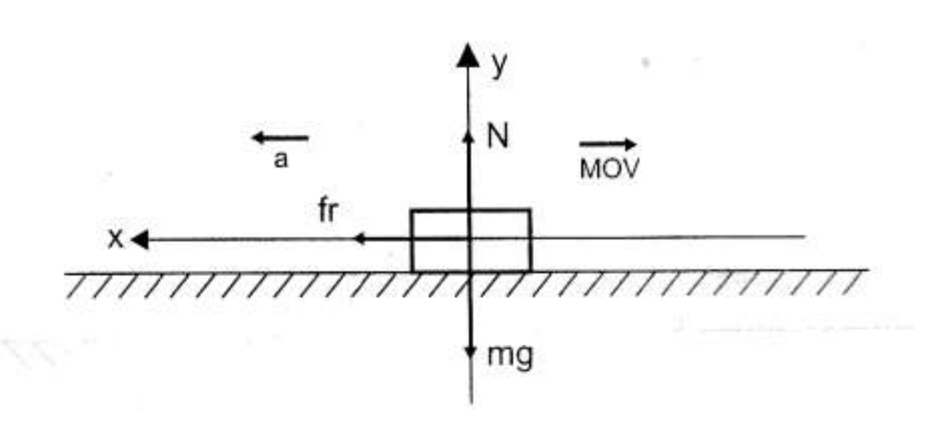
$a_1 = g(\text{sen}45° - \mu.\cos45°)$ (3)

La velocidad del cuerpo al finalizar el plano inclinado es:

$v_{F1}^2 = \cancel{v_{o1}^2}^{\,0} + 2a_1.L$; reemplazando (3):

$v_{F1}^2 = 2g(\text{sen}45° - \mu\cos45°).L$

En el plano horizontal:



$\Sigma F_y = 0$

$N - mg = 0$

$N = mg \qquad (4)$

$\Sigma F_x = 0$

$f_r = m.a_2$

$\mu.N = m.a_2 \qquad (5)$

Reemplazando (4) en (5), tenemos que la aceleración es:

$$\mu mg = m.a_2 \quad \Longrightarrow \quad a_2 = \mu.g$$

La velocidad final del cuerpo en el plano horizontal es nula:

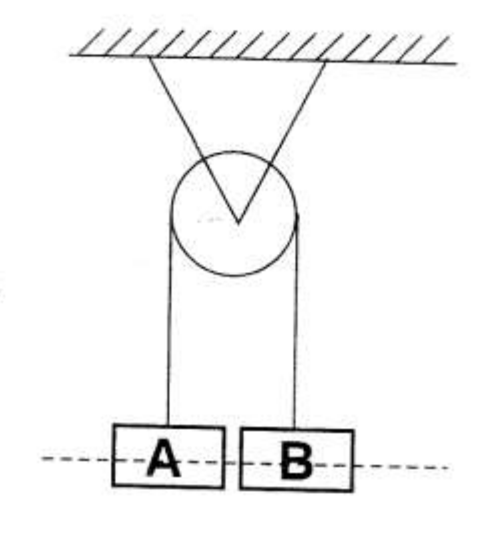
$$v_{F2}^2 = v_{o2}^2 + 2a_2(3L), \text{ donde } v_{o2}^2 = v_{F1}^2$$

$$0 = 2g(\text{sen}45° - \mu.\cos45°).L - 2\mu.g(3L)$$

$$2g.\text{sen }45°.L - 2g.\cos45°.L - 6\mu gL = 0$$

$$\text{sen }45° = \mu(\cos45° + 3)$$

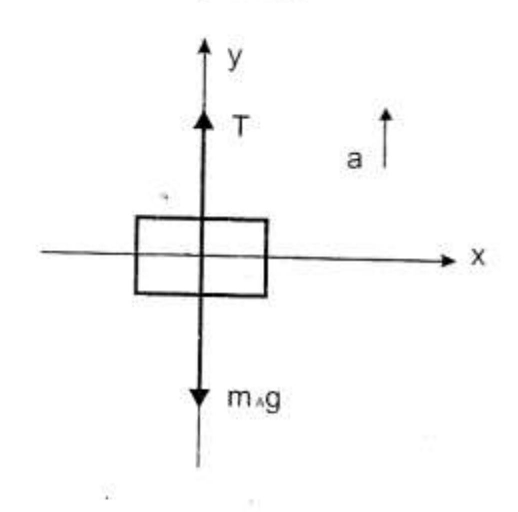
$$\mu = \frac{\text{sen }45°}{\cos45° + 3} = 0,19$$



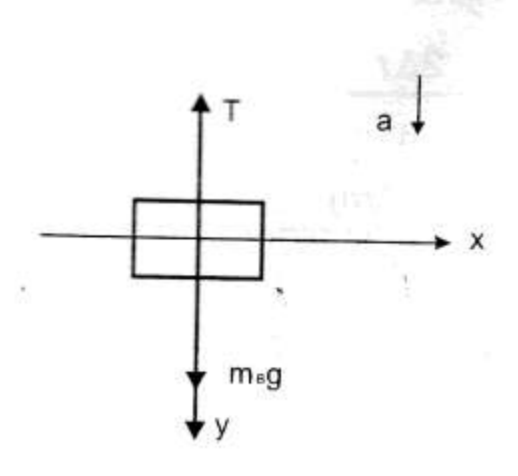
Dos cuerpos A y B de 2 kg y 4 kg respectivamente están sujetos a los extremos de una cuerda que pasa por una polea sin peso ni rozamiento. Si los cuerpos parten del reposo y a una misma altura, determinar:

a) La aceleración del sistema cuando se le deja en libertad.
b) La tensión de la cuerda.
c) La velocidad del bloque B cuando se ha movido 1 m.
d) La velocidad del bloque A al cabo de 4 s.
e) El tiempo que tardarán en desnivelarse 6 m.

Cuerpo A:



Cuerpo B:



a) **Cuerpo A:**

$\sum F_y = m_A.a$

$T - m_A g = m_A.a \quad (1)$

Cuerpo B:

$\sum F_y = m_B.a$

$m_B g - T = m_B.a \quad (2)$

Sumando (1) y (2), tenemos:

$$\begin{array}{r} T - m_A g = m_A.a \\ -T + m_B g = m_B.a \\ \hline g(m_B - m_A) = a\,(m_A + m_B) \end{array}$$

$$a = \frac{g(m_B - m_A)}{(m_A + m_B)}$$

$$a = \frac{9{,}8 m/s^2 (4kg - 2kg)}{2kg + 4kg}$$

$a = 3{,}27\ m/s^2$

b) Reemplazando en la ecuación (1):

$T = m_A.g = m_A.a$

$T = m_A.a + m_A.g$

$T = m_A(a+g)$

$T = 2kg(3{,}27\ m/s^2 + 9{,}8\ m/s^2)$

$T = 26{,}13[N]$

c) $\upsilon^2 = \cancelto{0}{\upsilon_o^2} + 2a\Delta.r$

$\upsilon^2 = 2(3{,}27\ m/s^2)1m$

$\upsilon = 2{,}56\ m/s$

d) $\upsilon = \cancelto{0}{\upsilon_o} + a.\Delta t$

$\upsilon = 3{,}27 m/s^2.4\ s$

$\upsilon = 13{,}08 m/s$

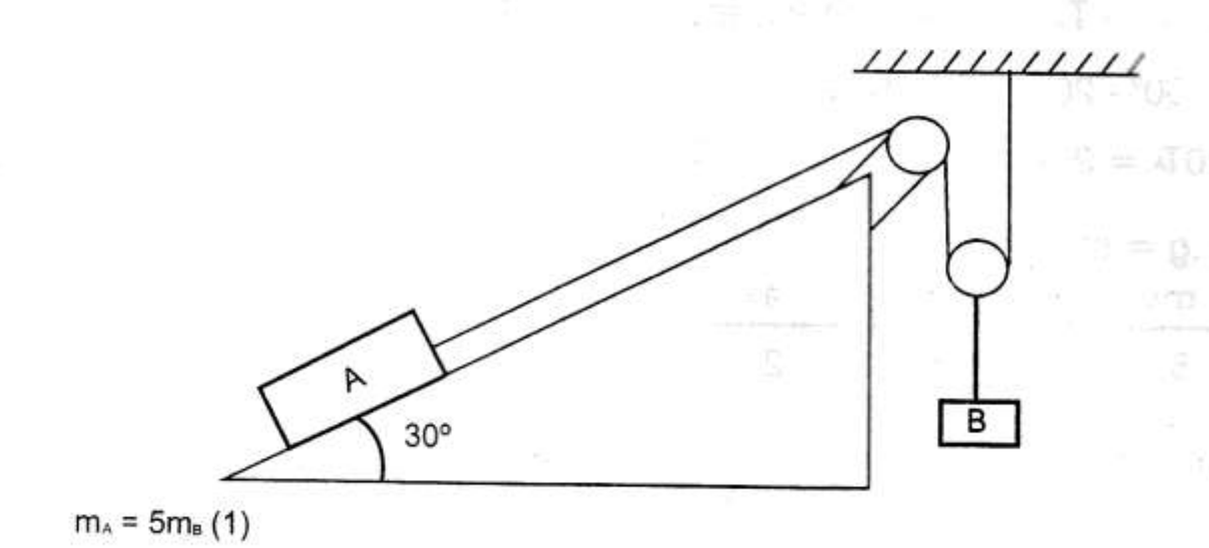
e) $\Delta r = \cancelto{0}{\upsilon_o \Delta t} + \frac{1}{2} a.\Delta t^2$

$$\Delta t^2 = \frac{2\Delta r}{a}$$

$$\Delta t^2 = \frac{2(3m)}{1{,}35\ m/s^2}$$

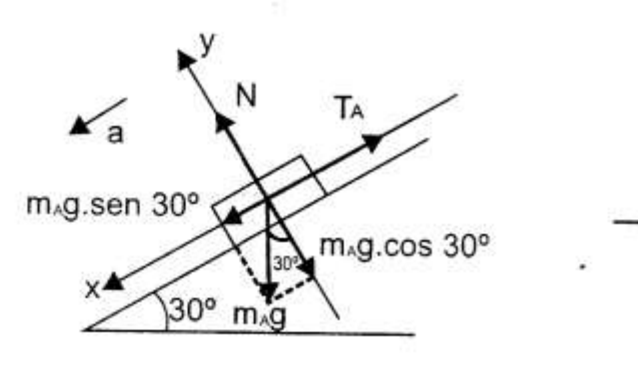
$\Delta t = 1{,}35$ seg

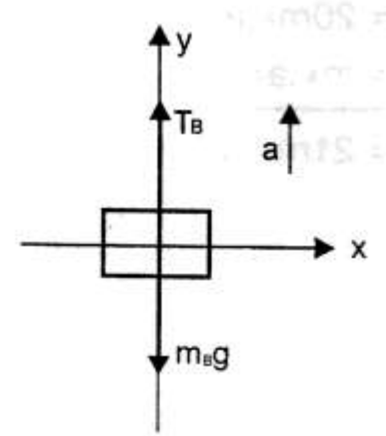
10. La masa del bloque A es 5 veces la del bloque B. Si el sistema se suelta del reposo, determinar la distancia recorrida por el bloque A a lo largo del plano inclinado y hacia dónde, cuando han transcurrido 3 s. Considerar que no existe rozamiento.

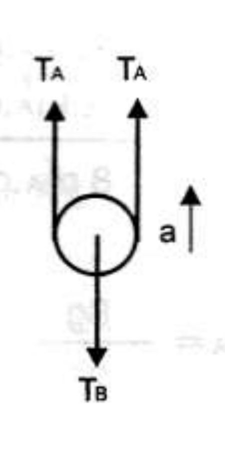


$m_A = 5m_B$ (1)

Cuerpo A: **Cuerpo B:** **Polea Móvil**







Cuerpo A:

$\Sigma F_x = m_A . a_A$

$m_A .g.\text{sen}30° - T_A = m_A . a_A$ (2)

Cuerpo B:

$\Sigma F_y = m_B . a_B$

$T_B - m_B . g = m_B . a_B$ (3)

Polea Móvil

$\Sigma F_y = \cancelto{0}{m_P} . a$

$2T_A - T_B = 0$

$T_B = 2T_A$ (4)

Analizando la geometría del movimiento, se tiene que si el bloque B sube una distancia d_B, el bloque A desciende por el plano inclinado una distancia d_A igual al doble de d_B. Por lo tanto:

$d_A = 2d_B$

$v_A = 2v_B$

$a_A = 2a_B$ en cualquier instante (5)

Reemplazando (1), (4) Y (5) en las ecuaciones (3) y (2), Y dejando todo en términos de a_A, m_A y T_A, tenemos:

(2) $m_A.g.sen30° - T_A = m_A.a_A$; multiplicando por 20:

$$20m_A.g.sen30° - 20T_A = 20m_A.a_A$$

$$10m_A.g - 20T_A = 20m_A.a_A \qquad (2)$$

(3) $T_B - m_B.g = m_B.a_B$

$$2T_A - \frac{m_A}{5}.g = \frac{m_A}{5}.\frac{a_A}{2}$$

$$20T_A - 2m_A.g = m_A.a_A$$

Sumando (2) y (3) tenemos: .

$$10m_A.g - 20T_A = 20m_A.a_A$$
$$-2m_A.g + 20T_A = m_A.a_A$$
$$8m_A.g = 21m_A.a_A$$

$$a_A = \frac{8g}{21}$$

$$a_A = \frac{8(9,8m/s^2)}{21}$$

$$a_A = 3,73m/s^2$$

Como el resultado es positivo, los sentidos asumidos para el movimiento son correctos.

El bloque A desciende por el plano inclinado:

$$d_A = v_0.\Delta t + ½\, a_A.\Delta t$$

$$d_A = ½\,(3,73m/s^2)(9\,s^2)$$

$$d_A = 16,79\text{ m}$$

EJERCICIO Nº 13

1. Un cuerpo de 200 kg adquiere una velocidad de 108 km/h en 10 s, cuando se le comunica una fuerza constante de 98[N]. Determinar:

a) La aceleración producida.
b) Qué velocidad llevaba al empezar a acelerar.

2. A un automóvil de 1000 kg que va por una carretera recta se le acciona con una fuerza constante de 490[N] durante 8 s, llegando a tener una velocidad de 36m/s. Determinar:

a) La velocidad que tenía el aútomóvil antes de empezar a acelerar.
b) Qué velocidad lleva cuando ha recorrido 150 m.

3. Una fuerza horizontal de 1568[N] produce una aceleración de 2,44 m/s^2 en un cuerpo de 400 kg que descansa sobre una superficie horizontal.
Determinar:

a) La fuerza normal ejercida por la superficie sobre el cuerpo.
b) El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie.

4. Un cuerpo de 6 kg parte del reposo y adquiere una velocidad de 36 km/h en una distancia horizontal de 28m.
Si $\mu_c = 0{,}25$, determinar:

a) El valor de la fuerza horizontal aplicada.
b) La aceleración producida.

5. En un lugar de la superficie terrestre, un cuerpo de 500 g pesa 4,89[N].
Determinar:

a) El valor de la aceleración de la gravedad en dicho punto.
b) La masa de un cuerpo de 200[N] en dicho lugar.

6. Un automóvil de 1200 kg cambia su velocidad en forma constante de
$(-12{,}61\vec{i} - 12{,}79\vec{j})$km/h a
$(-70\vec{i} - 71\vec{j})$ km/h en 1 minuto.
Determinar:

a) La aceleración producida
b) La fuerza ejercida por el motor.

7. Un cuerpo de 8 kg está en reposo en el punto (4, -7)m en t = 0 s. Si se le aplica una fuerza constante de $(-8\vec{i} + 1.6\vec{j})$[N], determinar:

a) La posición del cuerpo en t = 8 s.
b) La velocidad del cuerpo en t=12 s

8. Un cuerpo de 2 kg se encuentra en el punto (5, 2)m en t=2 s con una velocidad de $(-7\vec{i} + 3\vec{j})$m/s. Si se aplica sobre él una fuerza constante de $(-175\vec{i} + 75\vec{j})$[N] durante 6 s; determinar:

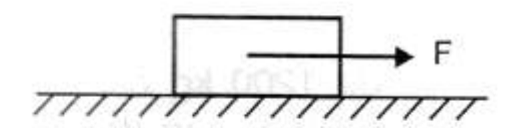
a) La posición final del cuerpo.
b) El desplazamiento realizado por el cuerpo.
c) La velocidad final del cuerpo.

EJERCICIO Nº 13

9. En la figura, un cuerpo de 20 kg se mueve a lo largo de una superficie horizontal lisa con una aceleración constante de 1 m/s^2. Determinar:

a) El valor de la fuerza normal.

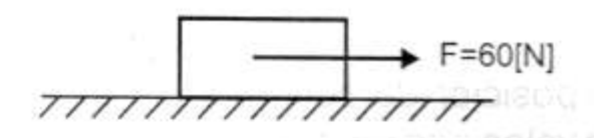
b) Qué fuerza F se necesita para producir esa aceleración.



10. Un bloque de 15 kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal como indica la figura. Cuando sobre él actúa una fuerza de 6O[N] durante 3 s y si $\mu_c = 0,2$, determinar:

a) La aceleración del bloque.

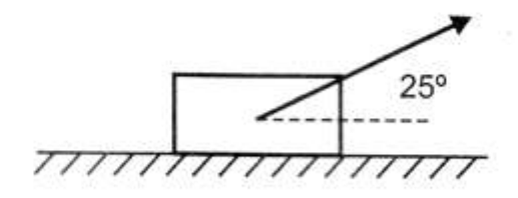
b) La velocidad final del bloque.



11. En la figura, si el cuerpo es de 10 kg y $\mu_c = 0,15$, determinar:

a) Qué valor debe tener la fuerza para que el cuerpo se mueva con velocidad constante.

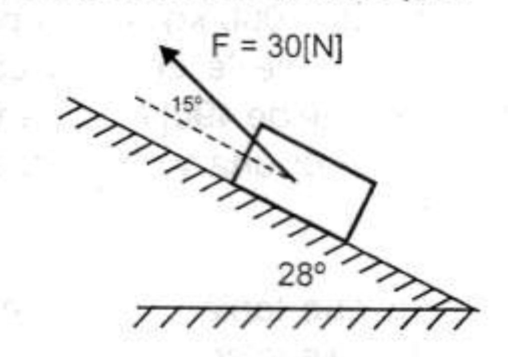
b) Qué valor debe tener la fuerza para que el cuerpo se mueva con una aceleración de 2 m/s^2.



12. Un cuerpo de 5 kg es empujado hacia arriba de un plano inclinado liso mediante una fuerza de 30[N] como indica la figura. Determinar:

a) La fuerza que ejerce el plano sobre el cuerpo.

b) La aceleración del bloque.



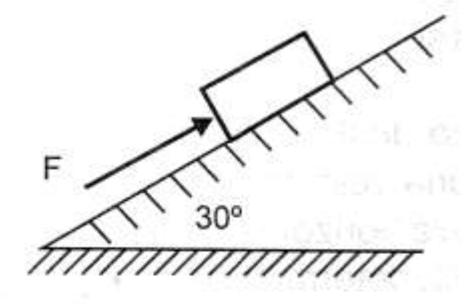
13. En la figura, si el bloque es de 30 kg y. $\mu_c = 0,2$, determinar:

a) El valor de F para que el bloque suba con velocidad constante.

b) El valor de F para que el bloque baje con velocidad constante.

c) El valor de F para que el bloque suba con una aceleración de 1 m/s^2.

d) El valor de F para que el bloque baje con una aceleración de 1 m/s^2.

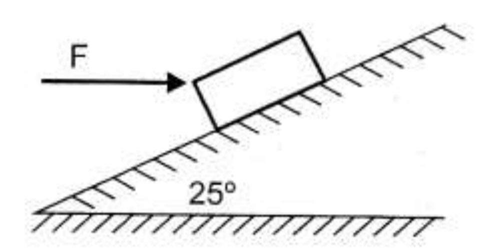


14. En la figura, si el bloque es de 16 kg y $\mu_c = 0,1$, determinar:

a) El valor de F para que el bloque suba con velocidad constante.

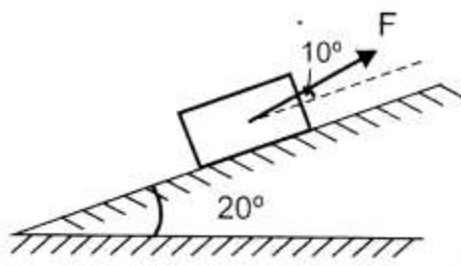
b) El valor de F para que el bloque baje con velocidad constante.

c) El valor de F para que el bloque suba con una aceleración de 2 m/s^2.
d) El valor de F para que el bloque baje con aceleración de 2 m/s^2.



15. En la figura, si el bloque es de 10 kg y μ_c = 0,15, determinar:

a) El valor de F para que el bloque suba con velocidad constante.
b) El valor de F para que el bloque baje con velocidad constante.
c) El valor de F para que el bloque suba con una aceleración de 0.7 m/s^2.
d) El valor de F para que el bloque baje con una aceleración de 0,7 m/s^2.



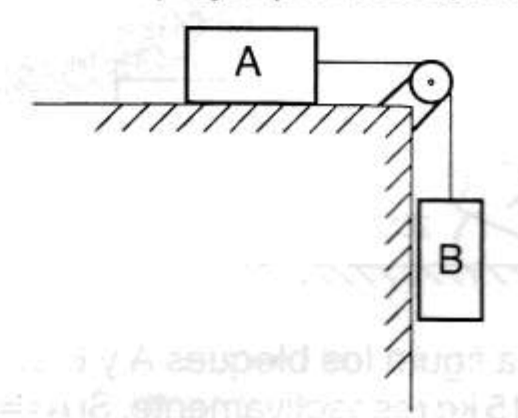
16. Se lanza un cuerpo hacia arriba, en un plano inclinado de 28° respecto a la horizontal, con una velocidad inicial de 10 m/s. Si μ_c= 0,2, determinar:
a) La distancia recorrida por el cuerpo sobre el plano hasta detenerse.
b) El tiempo empleado en subir.

17. Dos cuerpos del mismo peso, inicialmente en reposo, se dejan en libertad sobre un plano inclinado de 30°, hallándose separados 25 cm. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo superior y el plano es 0,1 Y entre el inferior y el plano es 0,25, determinar:

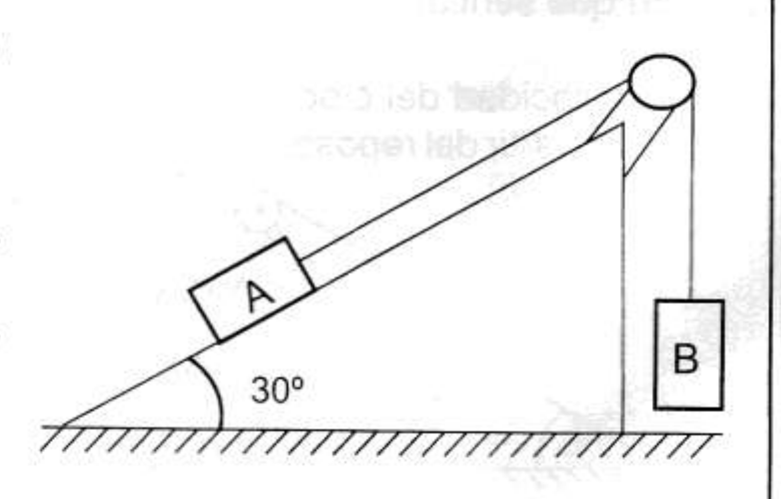
a) En qué tiempo el cuerpo superior alcanza al inferior.
b) La distancia recorrida por el cuerpo inferior hasta que es alcanzado por , el superior.

18. En la figura los bloques A y B son de 100 y 30 kg respectivamente. Determinar la aceleración de cada bloque y la tensión de la cuerda cuando:

a) No hay rozamiento.
b) El coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y el plano es 0,15.



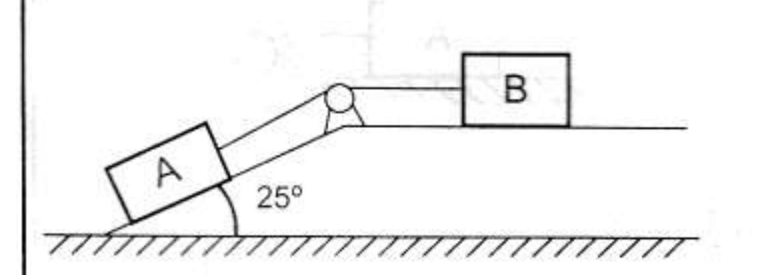
19. En la figura los bloques A y B son de 5 y 8 kg respectivamente. Si el plano inclinado es liso, determinar:



a) La aceleración de cada bloque.
b) En qué sentido se mueve cada uno de los bloques.
c) La tensión de la cuerda.
d) La velocidad del bloque B a los 2 s de dejarlo en libertad.

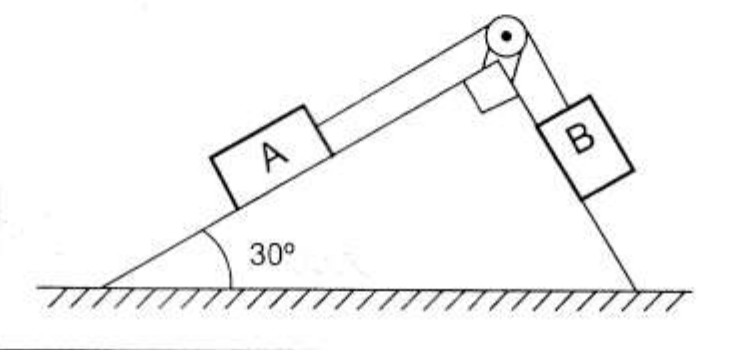
20. En la figura el bloque B es de 10 kg. Si el coeficiente de rozamiento cinético para todas las superficies es 0,3, determinar:

a) La masa del bloque A para que los dos bloques se muevan con velocidad constante.
b) La masa del bloque A para que los dos bloques se muevan con una aceleración de 1,5 m/s^2

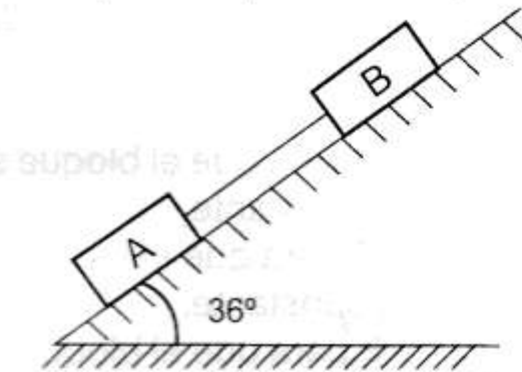


21. En la figura los bloques A y B son de 45 y 15 kg respectivamente. Si $\mu_c = 0,2$ para todas las superficies, determinar:

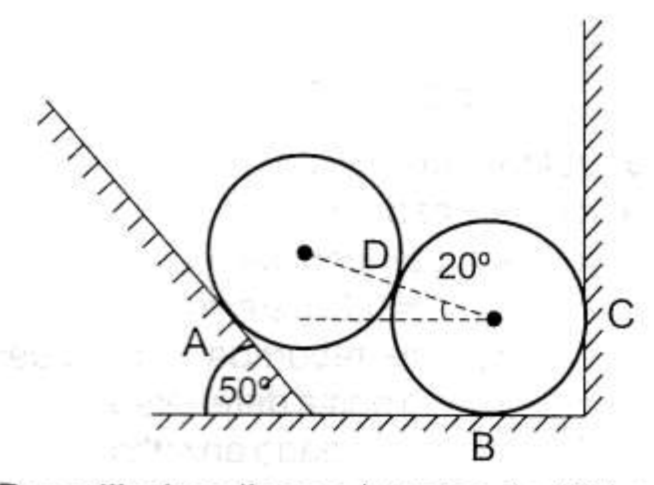
a) La aceleración de cada bloque.
b) En qué sentido se mueven los bloques.
c) La velocidad del bloque A, 4 s después de partir del reposo.



22. Dos cuerpos A y B de 20 y 12 kg respectivamente están unidos por una cuerda flexible e inextensible como indica la figura. Si $\mu_A = 0,25$ y $\mu_B = 0,32$, determinar:
a) La tensión de la cuerda cuando se dejan libres los cuerpos.
b) La aceleración de cada bloque.
c) La distancia recorrida por el bloque A 3 s después de partir del reposo.



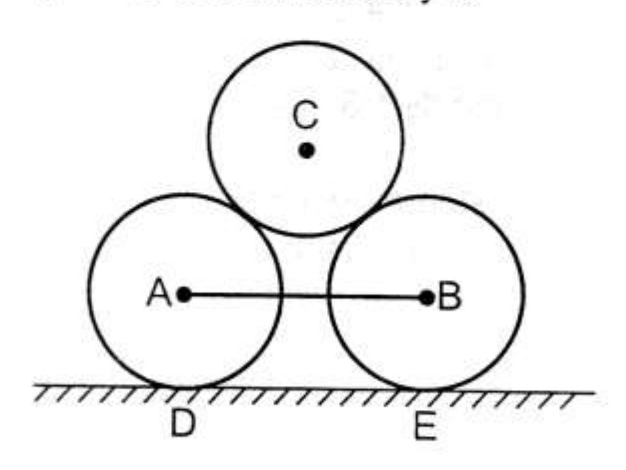
23. Dos esferas iguales y lisas de 15 kg cada una, están apoyadas como se indica en la figura. Si las paredes son lisas, determinar las reacciones producidas en los puntos de apoyo A, B, C, D.



24. Dos cilindros lisos e iguales de 20 kg cada uno y de radio 10 cm, tienen conectados sus centros por medio de una cuerda AB de 25 cm de longitud, descansando sobre un plano horizontal sin rozamiento, Un tercer cilindro, también

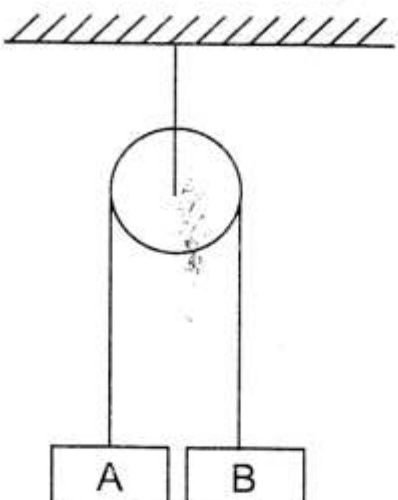
liso, de 30 kg y de 10 cm de radio, se coloca sobre los dos anteriores como indica la figura. Determinar:

a) La tensión de la cuerda AB.
b) Las fuerzas ejercidas sobre el piso en los puntos de contacto D y E.

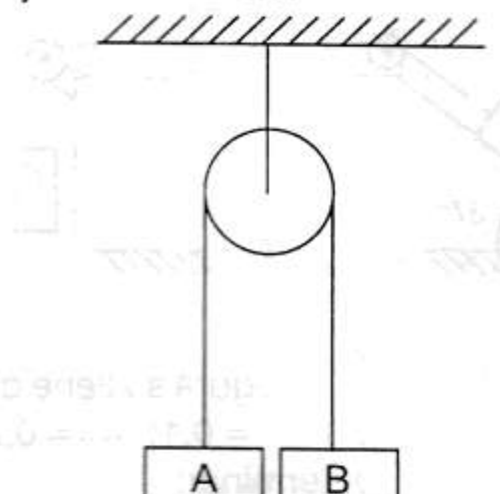


25. Dos cuerpos A y B de 35 y 30 kg respectivamente, están sujetos por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento. Si los cuerpos parten del reposo, determinar:

a) La aceleración de cada bloque.
b) La tensión de la cuerda.
c) La distancia recorrida por el cuerpo A en 6 s.

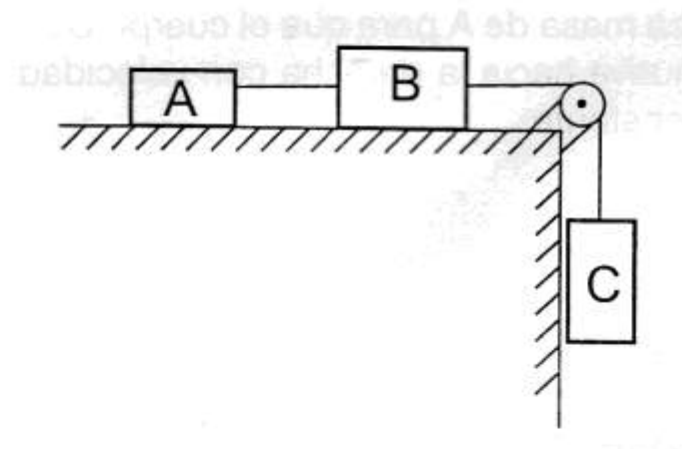


26. Dos cuerpos A y B de 300 g cada uno, están sujetos a los extremos de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento. Si sobre el cuerpo B se coloca otro de 100 g. Determinar:
a) La aceleración de cada cuerpo.
b) La tensión de la cuerda.
c) La velocidad del bloque B a los 5 s de dejarlo en libertad.



27. Tres cuerpos A, B y C de 10,20 y 30 kg respectivamente, están unidos mediante dos cuerdas como indica la figura.

Si $\mu_A = 0,3$ y $\mu_B = 0,15$, determinar,
a) La aceleración del cuerpo B.
b) Las tensiones en las cuerdas.

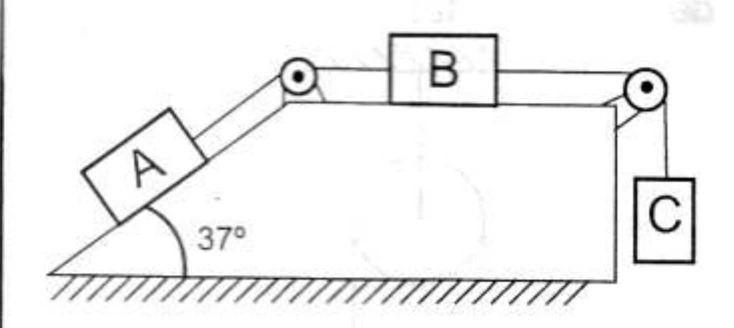


28. Tres cuerpos A, B y C de 40, 20 y 60 kg, respectivamente, están unidos mediante dos cuerdas como indica la figura. Si todas las superficies son lisas, determinar:

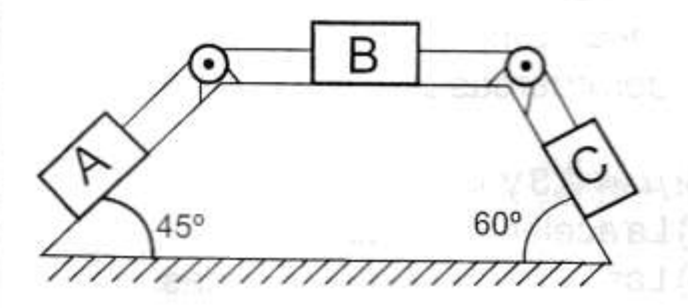
a) La aceleración del cuerpo C.

EJERCICIO Nº 13

b) En qué sentido se mueve cada uno de los cuerpos.
c) Las tensiones en las cuerdas.



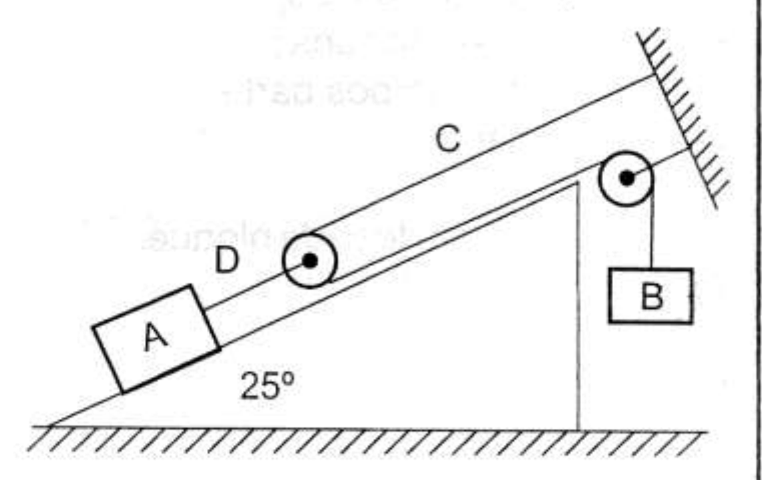
29. En el sistema de la figura se tiene que $m_B = m_C = 15$ kg. Si $\mu_A = 0{,}1$; $\mu_B = 0{,}2$ y $\mu_C = 0.3$, determinar:



a) La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la derecha con velocidad constante.
b) La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la izquierda con velocidad constante.
c) La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la derecha con una aceleración de 1,3 m/s^2.
d) La masa de A para que. el cuerpo B se mueva hacia la izquierda con una aceleración de 1,3 m/s^2.

30. En el sistema de la figura los cuerpos A y B son de 18 y 6 kg respectivamente. Si $\mu_c = 0{,}25$, determinar:

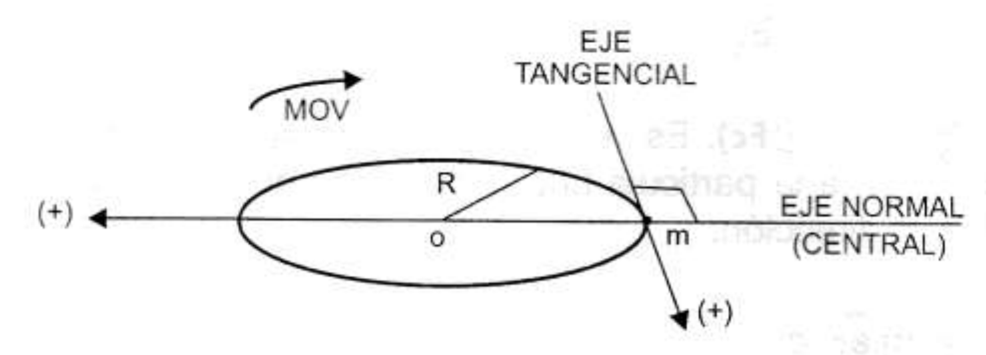
a) La aceleración de cada bloque.
b) En qué sentido se mueve cada uno de los bloques.
c) La tensión en las cuerdas C y D.



3.3 FUERZAS QUE ACTÚAN EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR

El movimiento circular, como se había descrito en la sección 2.3, es un movimiento contenido en un plano; por lo que la fuerza neta que actúe sobre una partícula con tal movimiento, también estará contenida en el mismo plano.

Para analizar dinámicamente el movimiento de una partícula, hay que elegir un sistema de referencia adecuado. En el caso del movimiento circular, dicho sistema sería el formado por los ejes en dirección tangencial y normal (central), para que las componentes de la aceleración de la partícula coincidan con estas direcciones.



El eje central (normal) está contenido en el plano del movimiento; pasa por el lugar que ocupa la partícula en el instante analizado y por el centro del círculo. Su sentido es positivo hacia el centro de la curva.

El eje tangencial, también está contenido en el plano del movimiento y es perpendicular al eje central. Su sentido positivo es aquel que coincide con la dirección del movimiento.

Aplicando la segunda Ley de Newton a una partícula que gira con movimiento circular, se tiene:

$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}, \text{ pero como } \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_C$$
$$\Sigma\vec{F} = m(\vec{a}_T + \vec{a}_C)$$
$$\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_T + m.\vec{a}_C$$
$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_T + \Sigma\vec{F}_C \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

FUERZA TANGENCIAL (ΣF_T). Es la componente de la fuerza neta en la dirección tangencial que comunica en la partícula una aceleración tangencial y determina que la velocidad cambie de módulo:

$$\Sigma\vec{F}_T = m.\vec{a}_T = m.\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \text{, cuyo módulo es:} \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

$$\Sigma F_T = m.\alpha.R \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

La fuerza tangencial es nula cuando la velocidad angular es constante (MCU):

$$\Sigma\vec{F} = \cancelto{0}{\Sigma\vec{F}_T} + \Sigma\vec{F}_C \text{ , porque } \vec{a}_T = 0$$

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_C \qquad \textbf{(3.3.4)}$$

Esto significa que la línea de acción de la fuerza neta pasa por el centro de curvatura.

La fuerza tangencial es diferente de cero, cuando el movimiento circular es variado:

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_T + \Sigma\vec{F}_C$$

FUERZA CENTRÍPETA (ΣFc). Es la componente de la fuerza neta en la dirección central que comunica a la partícula una aceleración centrípeta y determina que la velocidad cambie de dirección:

$$\Sigma\vec{F}_C = m.\vec{a}_C \text{, cuyo módulo es:} \qquad \textbf{(3.3.5)}$$

$$\Sigma F_C = m.\frac{v^2}{R} = m.\,\omega^2.R \qquad \textbf{(3.3.6)}$$

La fuerza centrípeta es nula cuando el movimiento es rectilíneo.

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_T + \cancelto{0}{\Sigma\vec{F}_C}$$
$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_T \qquad \textbf{(3.3.7)}$$

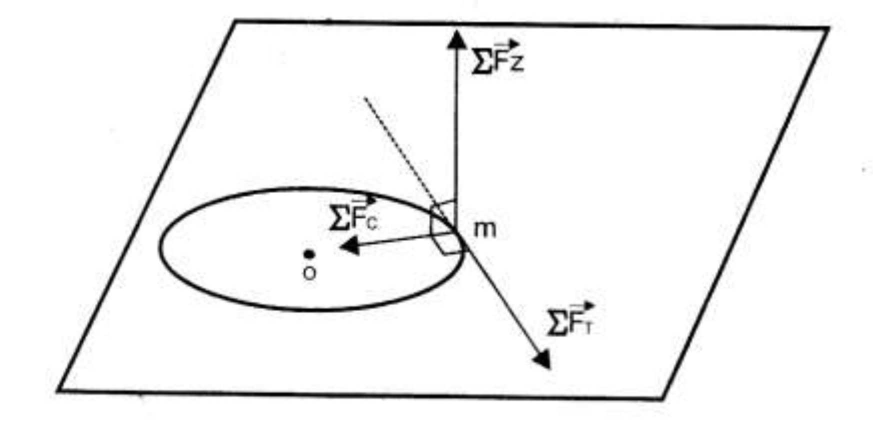
La fuerza centrípeta es diferente de cero en cualquier movimiento circular.

Es conveniente aclarar que las fuerzas tangencial y centrípeta, que actúan sobre una partícula con movimiento circular, son fuerzas como cualquiera de las anteriormente tratadas, porque se generan por la interacción de la partícula con otras; es decir, pueden ser el resultado de una tensión, fuerza elástica, peso, rozamiento, etc. y no constituyen en sí otro tipo de fuerzas o interacción.

FUERZA AXIAL (ΣFz). Como el movimiento circular es coplanar, entonces en la dirección perpendicular al plano del movimiento, la fuerza neta es nula.

Esta dirección se denomina ***axial*** y generalmente se representa por el eje **z**:

$$\Sigma\vec{F}_Z = m.\vec{a}_Z = 0 \qquad \textbf{(3.3.8)}$$



$$\left.\begin{array}{ll}(1)\ \Sigma\vec{F}_T = & m\vec{a}_T \\ (2)\ \Sigma\vec{F}_C = & m\vec{a}_C \\ (3)\ \Sigma\vec{F}_Z = & 0\end{array}\right] \rightarrow \qquad \textbf{(3.3.9)}$$

De la ecuación anterior, en cada análisis se utilizarán las que sean necesarias, dependiendo de las fuerzas aplicadas y de la dirección en que éstas actúen.

EJEMPLOS

1. Un cuerpo de 2 kg gira en un plano horizontal, describiendo una circunferencia de 1,2 m de diámetro, con una velocidad angular constante de 5 rad/s. Determinar:

a) Su aceleración centrípeta.
b) La rapidez del cuerpo.
c) La fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo.

$\phi = 1{,}2\ m$

$R = 0{,}6\ m$

a) $a_C = \omega^2.R$

$a_C = (5\ rad/s)^2.\ 0{,}6m$

$a_C = 15m/s^2$

b) $\upsilon = \omega.R$

$\upsilon = 5\ rad/s.0{,}6m$

$\upsilon = 3\ m/s$

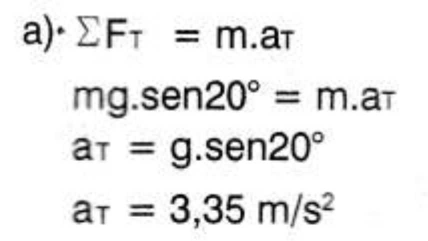
c) $\Sigma F_C = m.a_C$

$\Sigma F_C = 2\ kg.15\ m/s^2$

$\Sigma F_C = 30[N]$

2. Un péndulo de 1m de longitud, describe un arco de circunferencia sobre un plano vertical. La tensión de la cuerda es el doble del peso del cuerpo, cuando está en la posición indicada en la figura. Determinar:

a) La aceleración tangencial del cuerpo.
b) La aceleración centrípeta del cuerpo.
c) La velocidad del cuerpo.

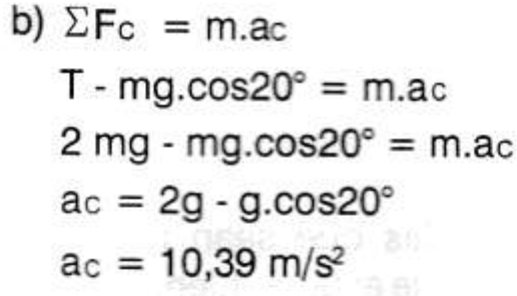


a) $\Sigma F_T = m.a_T$

$mg.sen20° = m.a_T$

$a_T = g.sen20°$

$a_T = 3,35\ m/s^2$



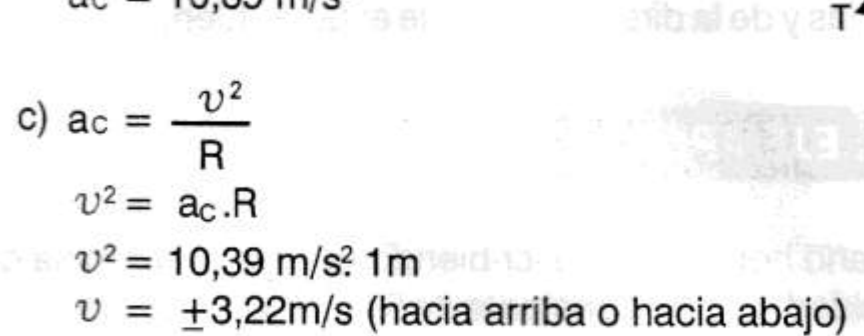
b) $\Sigma F_C = m.a_C$

$T - mg.cos20° = m.a_C$

$2\ mg - mg.cos20° = m.a_C$

$a_C = 2g - g.cos20°$

$a_C = 10,39\ m/s^2$



c) $a_C = \dfrac{v^2}{R}$

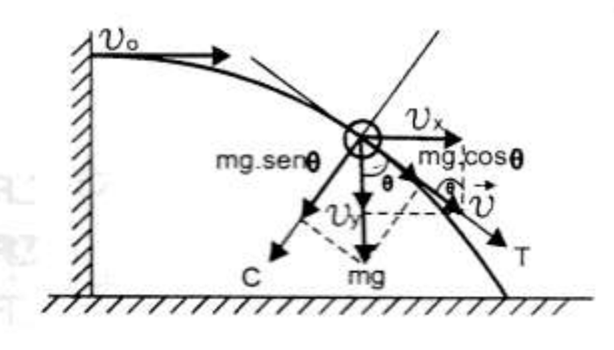
$v^2 = a_C.R$

$v^2 = 10,39\ m/s^2 . 1\,m$

$v = \pm 3,22 m/s$ (hacia arriba o hacia abajo)

3. Desde lo alto de un edificio se lanza un proyectil de 2 kg con una velocidad de $(15\vec{i})$m/s. Determinar:

a) La fuerza centrípeta en t = 3 s.
b) La fuerza tangencial en t = 3 s.
c) La fuerza neta en t = 3 s.



$\vec{v}_x = \vec{v}_o = (15\vec{i}\,)m/s$

$\vec{v}_y = g.\Delta t$

$\vec{v}_y = (9,8\,\vec{j}\,)m/s.\ 3\ s$

$\vec{v}_y = (-29,4\ j\,)m/s$

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$

$\vec{v} = (15\vec{i} - 29.\ 4\vec{j})m/s$

$tg\theta = \dfrac{v_x}{v_y} = \dfrac{15}{29.4}$

$\theta = 27.02°$

$\Sigma F_C = mg.sen\theta$

$\Sigma F_C = 2\ kg.9,8\ m/s^2.sen\ 27,02°$

$\Sigma F_C = 8,90[N]$

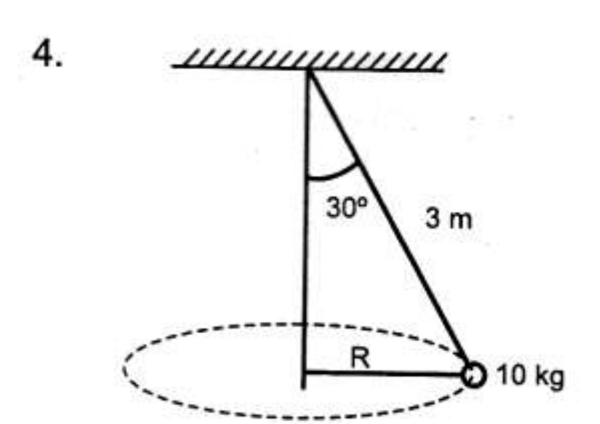
$\Sigma F_T = mg.cos\theta$

$\Sigma F_T = 2\ kg.9,8\ m/s^2.cos\ 27,0$

$\Sigma F_T = 17,46\ [N]$

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma\vec{F}_T + \Sigma\vec{F}_C$$
$$\Sigma F^2 = \Sigma F_T^2 + \Sigma F_C^2$$
$$\Sigma F^2 = (8{,}90[N])^2 + (17{,}46[N])^2$$
$$\Sigma F = 19{,}6[N]$$

4.



Un cuerpo de 10 kg se hace girar en una circunferencia horizontal, como se indica en la figura, sujeto a una cuerda de 3 m de longitud y con una rapidez constante. Si la cuerda forma un ángulo de 30° con la vertical, determinar:

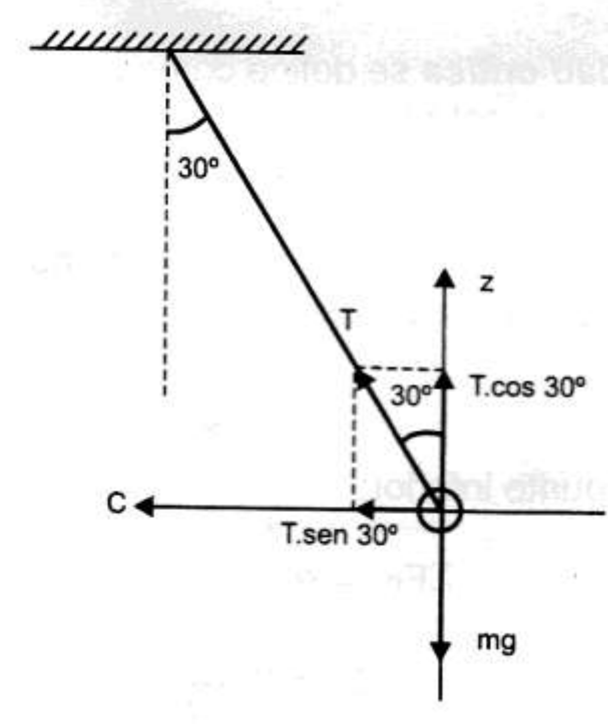
a) La tensión en la cuerda.
b) El valor de la rapidez del cuerpo.

$$\text{sen}30° = \frac{R}{3m}$$

$$R = 3m.\text{sen}30°$$
$$R = 1{,}5\ m$$

a) $\Sigma F_Z = 0$

$$T.\cos 30° - mg = 0$$
$$T = \frac{mg}{\cos 30°}$$
$$T = \frac{10kg.9{,}8\ m/s^2}{\cos 30°}$$
$$T = 113{,}16[N]$$

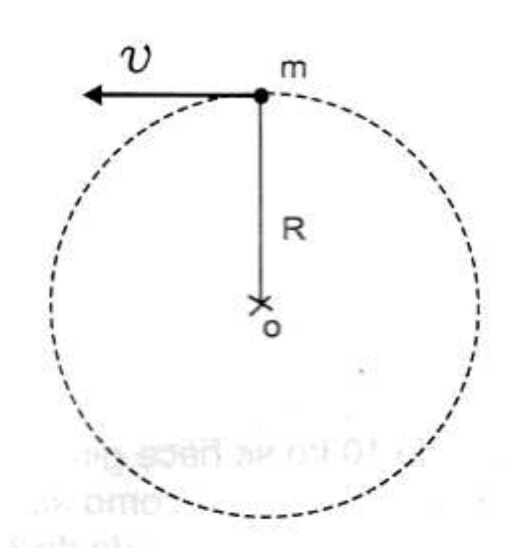


b) $\Sigma F_C = m.a_C$

$$T.\text{sen}\ 30° = \frac{m.v^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{R.T.\text{sen}30°}{m} = \frac{1{,}5m.113{,}16[N].\text{sen}30°}{10kg}$$

$v = 2{,}91$ m/s

5.



Una piedra de masa **m** se ata al extremo de una cuerda de longitud **R** y se le hace girar en un plano vertical. Determinar:

a) La mínima velocidad que debe tener la piedra en el punto superior de su trayectoria, para que pueda completar la vuelta (velocidad crítica)

b)La tensión en la cuerda, si al pasar por el punto más bajo de la trayectoria, la piedra tiene una velocidad v.

a) En la posición superior

$$\Sigma F_c = m.a_c$$

$$mg + T = m.\frac{v^2}{R}$$

Cuando la velocidad es la mínima, T =0

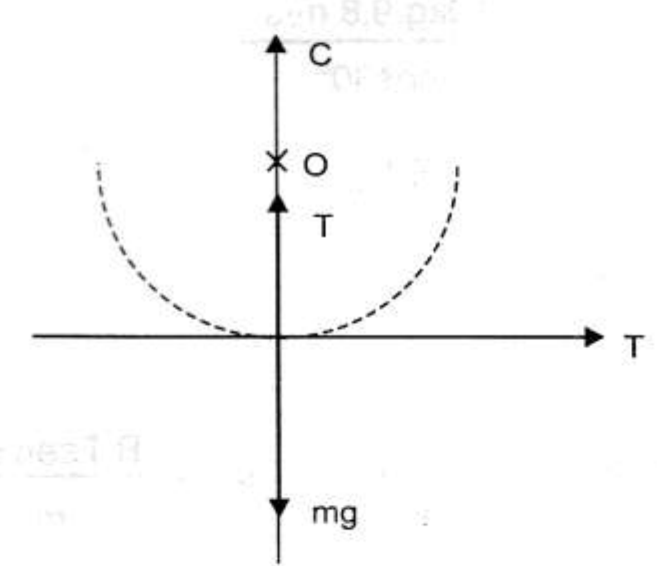
$$\not{m}g = \not{m}.\frac{v^2}{R}$$

$$v_{min} = v_{\text{crítica}} = \sqrt{gR}$$

La ***velocidad crítica*** se define como la mínima velocidad que debe tener un cuerpo que se mueve sobre una trayectoria circular en un plano vertical, en la posición superior, a fin de que se complete la trayectoria.

Dinámicamente, se cumple que en este punto el peso del cuerpo es igual a la fuerza centrípeta que actúa sobre él.

b) En el punto inferior:

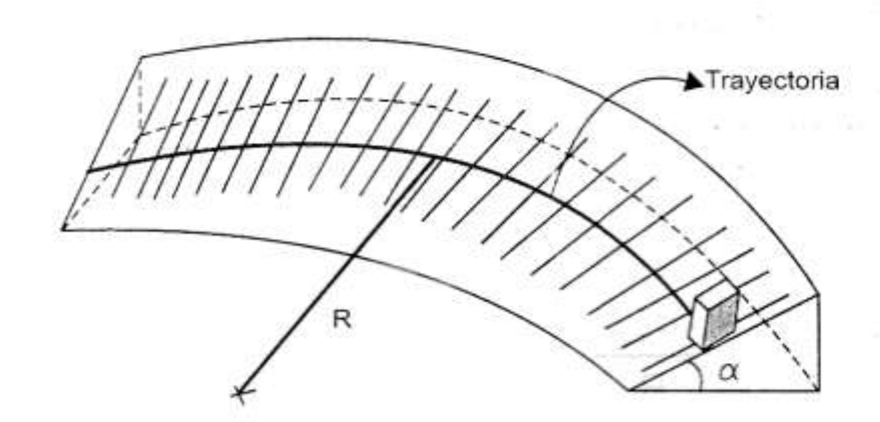


$$\Sigma F_c = m.a_c$$

$$T - mg = m.\frac{v^2}{R}$$

$$T = mg + m.\frac{v^2}{R}$$

6. Una carretera en una curva de radio R tiene un ángulo de peralte α. Si el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y la carretera es μ, determinar:



a) El rango de velocidad con que podría entrar a la curva un auto, para que no derrape (resbale lateralmente).

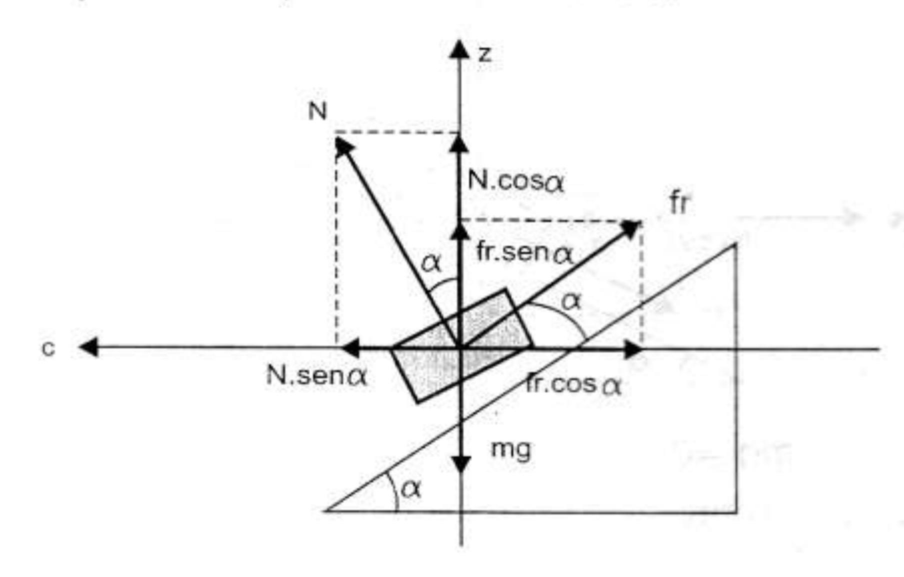
b) El valor de la velocidad óptima con la que el auto deberá tomar la curva.

a) El ángulo de peralte, en las carreteras, caminos, vías férreas, etc., es la inclinación que tiene la vía en una curva, respecto al plano horizontal. Proporciona mayor seguridad a los vehículos, permitiendo que se mantengan en la trayectoria porque incrementa el valor de la fuerza centrípeta en la curva.

Un auto puede tomar una curva con seguridad con una serie de valores para su velocidad, todos estos comprendidos en un cierto rango.

Los límites superior e inferior de este rango determinan las velocidades máxima y mínima con que el auto puede tomar la curva sin derrapar hacia arriba o hacia abajo.

Velocidad mínima. Para esta condición el auto tenderá a deslizarse lateralmente hacia abajo de la carretera, por lo que la fuerza de rozamiento sobre los neumáticos estará en sentido opuesto a tal tendencia.



$\Sigma F_z = 0$

$N.\cos\alpha + fr.\text{sen}\,\alpha - mg = 0$

$N.\cos\alpha + \mu\ .N.\text{sen}\,\alpha = mg$

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu.\text{sen}\,\alpha} \qquad (1)$$

$\Sigma F_c = m.a_c$

$$N.\text{sen}\,\alpha - fr.\cos\alpha = m.\frac{v^2_{mín}}{R}$$

$$N.\text{sen}\,\alpha - \mu N.\cos\alpha = m.\frac{v^2_{mín}}{R} \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{m.v^2_{mín}}{R(\text{sen}\,\alpha - \mu.\cos\alpha)} \qquad (2)$$

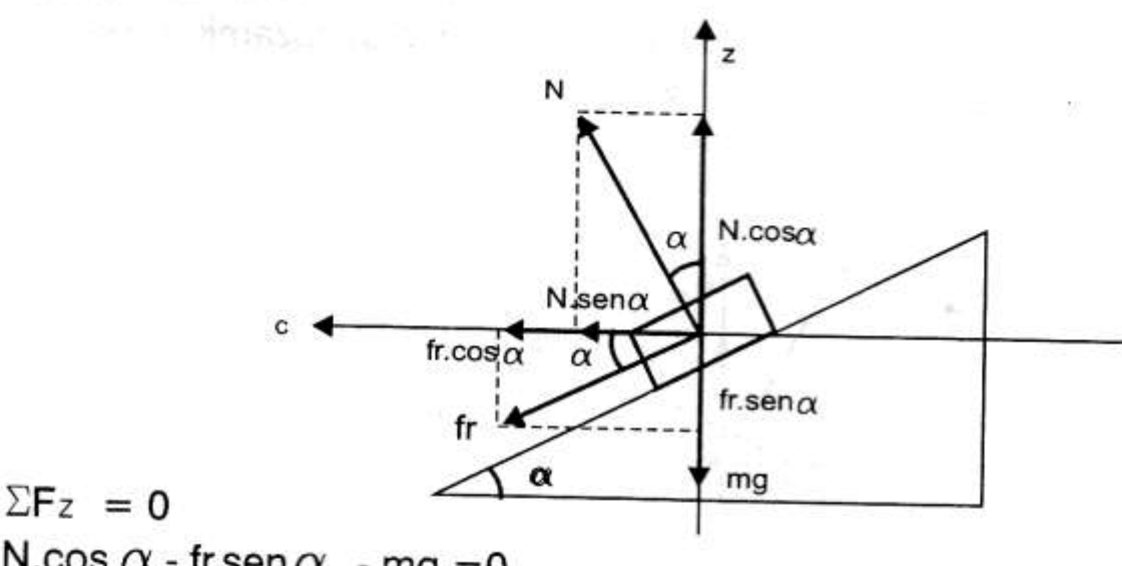
Igualando (1) y (2) y despejando $v_{mín}$:

$$N = N$$

$$\frac{\not{m}\,g}{\cos\alpha + \mu.\text{sen}\,\alpha} = \frac{\not{m}.v^2_{mín}}{R(\text{sen}\,\alpha - \mu.\cos\alpha)}$$

$$v_{mín} = \sqrt{\frac{g.R(\text{sen}\,\alpha - \mu.\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu.\text{sen}\,\alpha}}$$

Velocidad máxima. Para esta condición el auto tenderá a deslizarse lateralmente hacia arriba de la carretera, por lo que la fuerza de rozamiento sobre los neumáticos actuará en sentido opuesto a tal tendencia.



$\Sigma F_z = 0$

$N.\cos\alpha - fr.\text{sen}\,\alpha - mg = 0$

$N.\cos\alpha - \mu.N.\text{sen}\,\alpha = mg$

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu.\text{sen}\ \alpha} \qquad (3)$$

$$\Sigma F_C = m.a_C$$

$$N.\text{sen}\ \alpha + fr.\cos\alpha = m.a_C$$

$$N.\text{sen}\ \alpha + \mu.N.\cos\alpha = m.\frac{v^2_{máx}}{R} \Longrightarrow N = \frac{m.v^2_{máx}}{R(\text{sen}\ \alpha + \mu.\cos\alpha)} \qquad (4)$$

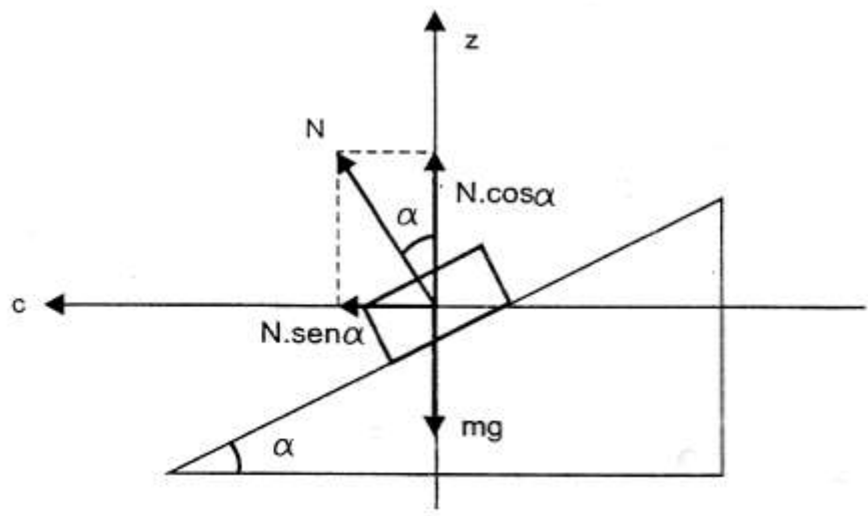
Igualando (3) y (4) y despejando $v_{máx}$:

$$N = N$$

$$\frac{mg}{\cos\alpha - \mu \text{sen}\ \alpha} = \frac{m.v^2_{máx}}{R(\text{sen}\ \alpha + \mu.\cos\alpha)}$$

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{g.R(\text{sen}\ \alpha + \mu.\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu.\text{sen}\ \alpha}}$$

) **Velocidad óptima.** Es la velocidad que deberá tener el auto en la curva, a fin de que no tienda a deslizarse lateralmente (con relación a la carretera) hacia ningún lado (fr = 0).



$$\Sigma F_Z = 0$$

$$N.\cos\alpha - mg = 0$$

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha} \qquad (5)$$

$$\Sigma F_C = m.a_C$$

$$N.\text{sen}\,\alpha = m.\frac{v^2_{\text{ópt}}}{R}$$

$$N = \frac{m.v^2_{\text{ópt}}}{R.\text{sen}\alpha} \qquad (6)$$

Igualando (5) y (6) y despejando $v_{\text{ópt}}$:

$$N = N$$

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{m.v^2_{\text{ópt}}}{R.\text{sen}\alpha}$$

$$v_{\text{ópt}} = \sqrt{\frac{g.R\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}}\text{, como } \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \text{tag}\,\alpha$$

$$v_{\text{ópt}} = \sqrt{g.R.\text{tag}\,\alpha}$$

EJERCICIO Nº 14

1. Un cuerpo de 2 kg atado al extremo de una cuerda de 1,5 m de longitud, gira sobre un plano horizontal liso con una aceleración angular de 10 rad/s^2. Determinar:

a) La aceleración tangencial del cuerpo.
b) La fuerza tangencial a que está sometido el cuerpo.
c) Qué fuerza neta actúa sobre el cuerpo, cuando su rapidez es 3 m/s.

2. Un automóvil de 1200 kg recorre una curva horizontal de 350 m de radio con una rapidez de 36 km/h. Si la curva no tiene peralte, determinar:

a) La aceleración centrípeta que actúa sobre el cuerpo.
b) La fuerza ejercida por las ruedas sobre la carretera, para mantener el movimiento sobre la curva.

3. Un cuerpo de 500 g atado al extremo de una cuerda de 1 m de longitud, gira sobre un plano horizontal liso con una velocidad angular de 40 rad/s. Determinar:

a) La aceleración centrípeta del cuerpo.
b) La tensión de la cuerda.
c) La máxima rapidez con la que puede girar, si la tensión de rotura es1000[N].

4. Un avión lleva una rapidez de 648 km/h en una curva horizontal. Si la fuerza centrípeta que actúa sobre el piloto de 65 kg es de 1000[N], determinar:

a) La aceleración centrípeta que actúa sobre el piloto.
b) El radio de la curva en que se mueve el avión.

5. Un cuerpo de 15 kg parte del reposo y se mueve alrededor de una circunferencia horizontal de 40 m de radio, por la acción de una fuerza tangencial de 1200 [N] que actúa durante 8 s. Determinar.

a) La aceleración tangencial que actúa sobre el cuerpo.
b) La aceleración angular.
c) La fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo al término de los 8 s.

6. Un cuerpo de 10 kg atado a una cuerda de 1,6 m de longitud, gira con velocidad constante en círculos horizontales.Si el período es de 3 s, determinar:

a) La velocidad del cuerpo.
b) La fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo.

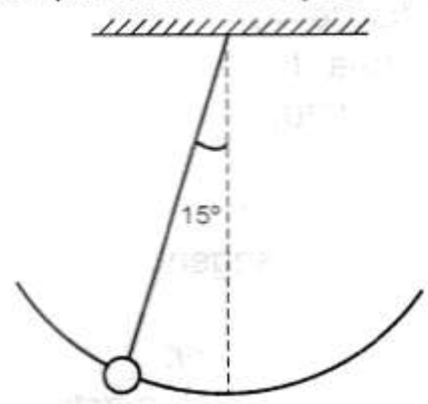
7. Un cuerpo de 8 kg atado a una cuerda de 1,3 m de la longitud, gira por una trayectoria circular horizontal a 720 RPM. Determinar:

a) La aceleración centrípeta.
b) La fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo.

8. Un péndulo de 1,5 m de longitud, describe un arco de circunferencia sobre un plano vertical. Si la tensión de la cuerda es cuatro veces el peso.

del cuerpo, cuando están en la posición indicada en la figura, determinar:

a) La aceleración tangencial del cuerpo.
b) La aceleración centrípeta.
c) La rapidez del cuerpo.



9. Se lanza un proyectil de 5 kg con una velocidad de $(26\vec{i} + 32\vec{j})$ m/s. Determinar a los 2 s de vuelo:

a) El valor de la fuerza tangencial que actúa sobre el proyectil.
b) El valor de la fuerza centrípeta que actúa sobre el proyectil.
c) El valor de la fuerza neta que actúa sobre el proyectil.

10. El cuerpo de un péndulo cónico es de 2 kg y cuelga de una cuerda de 8 m de longitud, describiendo una trayectoria circular en un plano horizontal. Si el cuerpo se desvía de la vertical hasta que la cuerda forme un ángulo de 30° con la vertical, determinar:

a) La tensión de la cuerda.
b) Cuál es la rapidez del cuerpo.

11. Un molociclista y su maquina, que pesan 1500 [N], describen un rizo de 4 m de radio. Si $\mu = 0$, determinar:

a) La velocidad crítica.
b) La fuerza que ejerce el rizo sobre el móvil en la parte superior.
c) La fuerza que ejerce el rizo sobre el móvil en la parte inferior, si su rapidez en ese punto es de 14 m/s.

12. Una carretera en una curva de 50 m de radio, tiene un ángulo de peralte de 18°. Si $\mu = 0{,}3$, determinar:

a) El rango de velocidades con que podría entrar en la curva un auto, para que no derrape.
b) El valor de la velocidad óptima con la que el auto deberá tomar la curva.

13. En un péndulo cónico, la longitud de la cuerda es 0,65 m y el cuerpo de 0,8 kg describe una trayectoria circular horizontal con una velocidad angular de 4 rad/s. Determinar:

a) La tensión de la cuerda.
b) El ángulo entre la cuerda y la vertical.

14. Un cuerpo de 1 kg describe una circunferencia vertical atado al extremo de una cuerda de 1,2 m de longitud, con una rapidez constante de 5 m/s. Determinar la tensión de la cuerda. cuando:

a) El cuerpo se encuentra en el punto más bajo de la trayectoria.
b) El cuerpo se encuentra en el punto más alto de la trayectoria.
c) El cuerpo se encuentra al mismo nivel que el centro de la circunferencia.
d) Ésta forma un ángulo de 60° sobre la horizontal.

EJERCICIO Nº 14

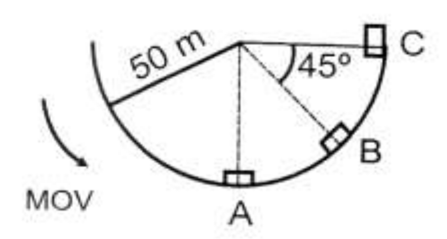
15. Un vehículo de 800 kg describe una curva horizontal de 35 m de radio. Si $\mu = 0.2$, determinar:

a) La máxima velocidad en km/h con que podrá tomar la curva sin derrapar, si no hubiese peralte.
b) El peralte de la curva para que no derrape a la velocidad de 108 km/h.

16. Sobre un disco se coloca un cuerpo de 50 g a una distancia de 15 cm del centro. Si el sistema gira en el plano horizontal partiendo del reposo, con una aceleración angular de 2,5 rad/s^2 y si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el disco es 0,2, determinar:

a) El tiempo que el cuerpo permanecerá sin deslizar, respecto del disco.
b) Qué rapidez tendrá el cuerpo, cuando comienza a deslizarse.

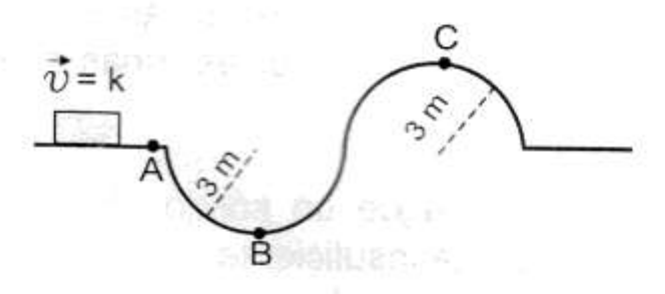
17. Un cuerpo de 15 kg se mueve con rapidez constante de 4 m/s por la pista de la figura. Determinar la reacción que ejerce la pista sobre el cuerpo en los puntos A, B y C.



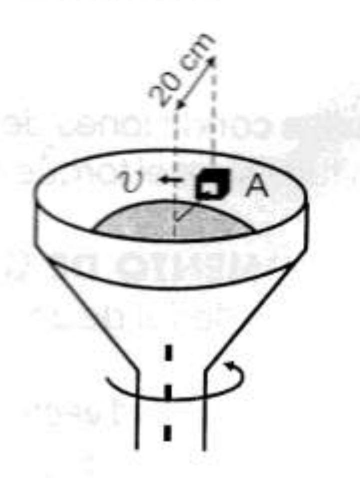
18. Un cuerpo de 1,5 kg cuelga de una cuerda de 1,8 m de longitud. Cuando la cuerda forma un ángulo de 40º con la vertical, el cuerpo tiene una velocidad de 6 m/s. Determinar:

a) La aceleración tangencial.
b) La aceleración centrípeta.
c) El valor de la aceleración total.
d) La tensión en la cuelda.
e) El valor de la fuerza total ejercida sobre el cuerpo.

19. Un móvil de 4 kg se desplaza con una rapidez constante de 5 m/s por la pista de la figura. Determinar el valor de la fuerza centrípeta en los puntos A, B y C.



20. El sistema de la figura gira alrededor de un eje vertical con velocidad constante. Conociendo que el coeficiente de rozamiento entre el pequeño bloque A y la pared cilíndrica es 0,2, determinar la mínima velocidad para la cual el bloque permanecerá en contacto con la pared



3.4 EQUILIBRIO DE UN SÓLIDO

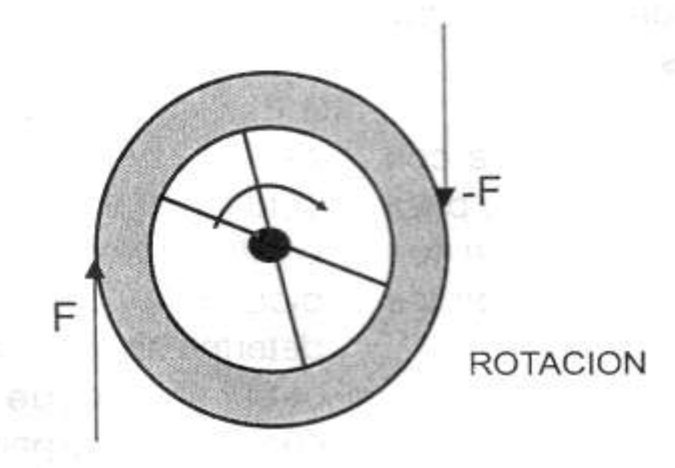
En la sección 3.2, al estudiar la primera y la tercera ley de Newton, se definió el equilibrio de una partícula. La condición necesaria y suficiente es que la fuerza neta aplicada sobre la partícula sea nula, con lo cual ésta se encuentra en reposo o se traslada con MRU.

Además, en el análisis de la dinámica de la partícula se considera que en relación con el movimiento, el único efecto que las fuerzas podrían producir es el de la traslación, ya que la partícula al ser considerada como un punto no podría rotar sobre sí misma.

Pero si las fuerzas están aplicadas sobre un sólido rígido (cuerpo rígido), los efectos con relación al movimiento podrían ser de traslación y, o, rotación.

Un sólido (conjunto de partículas) se considera rígido, si no sufre deformación, es decir, si todas sus partículas, unas respecto de otras, están siempre a la misma distancia.

Cuando se trata de un sólido, la condición de equilibrio determinada para una partícula, resulta insuficiente, puesto que la fuerza neta aplicada al sólido podría ser nula y, sin embargo, el cuerpo podría rotar, como en el caso del volante ilustrado en la siguiente figura:



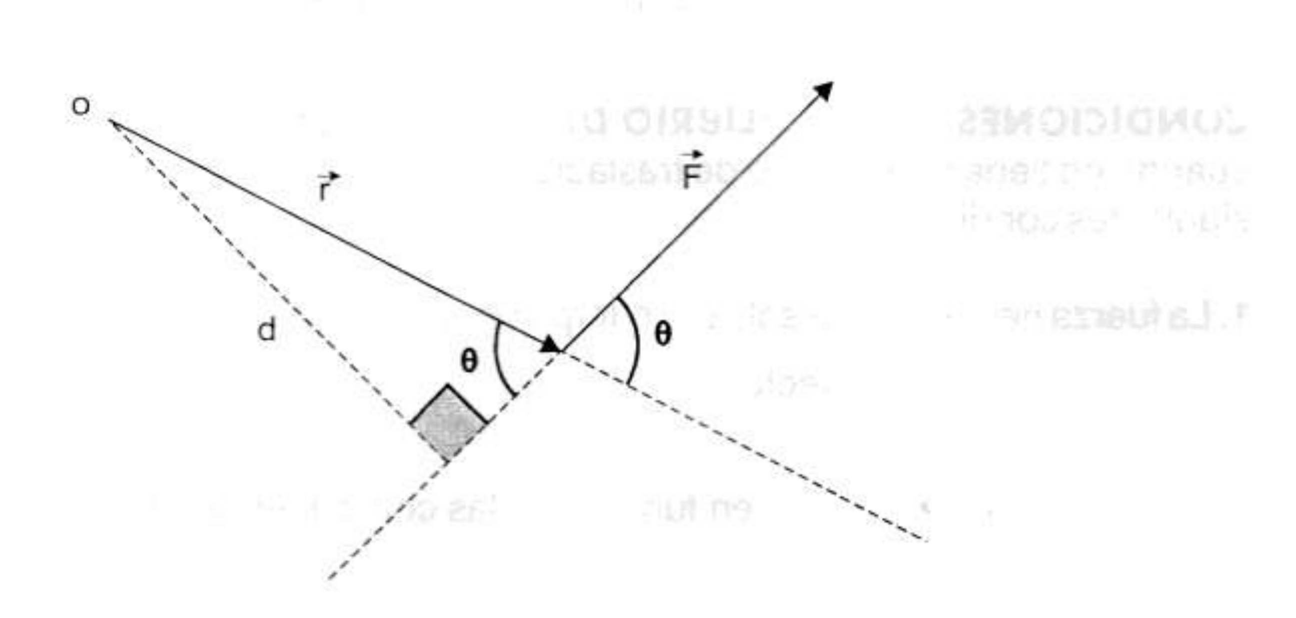
Para analizar las condiciones de equilibrio de un sólido rígido es necesario definir una nueva magnitud física: el torque o momento de una fuerza.

TORQUE O MOMENTO DE UNA FUERZA. Mide la tendencia de un sólido de un sistema a rotar alrededor de un punto o un eje, bajo la acción de la fuerza.

El torque es una magnitud vectorial que se define por:

$$\vec{\tau}_o = \vec{r} \times \vec{F}, \text{ donde:} \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

$\vec{\tau}_o$ = Torque en el punto 0.
$\vec{r}$ = Vector posición de un punto cualquiera de la línea de acción de la fuerza $\vec{F}$, con relación al punto 0, donde se calcula el torque.
$\vec{F}$ = Fuerza aplicada al cuerpo.



El módulo del torque con respecto al punto 0, es igual al producto del módulo de la fuerza (F)por la distancia perpendicular (d), desde el punto 0 hasta la línea de acción de la fuerza. A esta distancia se la denomina brazo de momento o brazo de palanca:

$$|\vec{\tau}_o| = F.d \quad \textbf{(3.4.2)}$$

$$|\vec{\tau}_o| = Fr \operatorname{sen} \theta \quad \textbf{(3.4.3)}$$

De esto se puede concluir que el torque de una fuerza depende del punto con respecto al cual se lo calcule, puesto que si el punto varía, varía también el brazo de palanca.

Una fuerza no genera torque en los puntos contenidos en la línea de acción de la fuerza, porque (d) es cero.

Por la definición del producto vectorial, se tiene que el torque es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Como el presente estudio se restringirá a fuerzas coplanares, el torque será perpendicular al plano de éstas y su sentido será horario o antihorario. Para los cálculos generalmente se considera a los torques antihorarios como positivos y a los horarios como negativos.

UNIDADES. El torque es una magnitud vectorial, cuyas unidades son las de una distancia multiplicada por la de una fuerza:

En el SI:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}_o$$

$$1[m] \times 1[N] = 1[N.m]$$

En el CGS:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}_o$$

$$1[cm] \times 1[dina] = 1[dina.cm]$$

CONDICIONES DE EQUILIBRIO DEL SÓLIDO. Un sólido rígido está en equilibrio cuando no tiene movimiento de traslación ni de rotación. Para esto son necesarias las siguientes condiciones:

1. La fuerza neta aplicada sobre el cuerpo debe ser nula:

$$\Sigma\vec{F} = 0, \text{ vectorialmente} \qquad \textbf{(3.4.4)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 \end{array}\right\} \text{ en función de las componentes escalares} \qquad \textbf{(3.4.5)}$$

Esta condición indica que el cuerpo no tiene movimiento de traslación, considerando que su velocidad inicial es cero.

2. El torque neto evaluado en cualquier punto del cuerpo o sistema, debe ser nulo:

$$\Sigma\vec{\tau}_o = 0, \text{ vectorialmente} \qquad \textbf{(3.4.6)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \tau_{ox} = 0 \\ \Sigma \tau_{oy} = 0 \\ \Sigma \tau_{oz} = 0 \end{array}\right\} \text{ en función de las componentes escalares} \qquad \textbf{(3.4.7)}$$

Esta condición indica que el cuerpo no tiene movimiento de rotación, considerando que su velocidad angular inicial es cero.

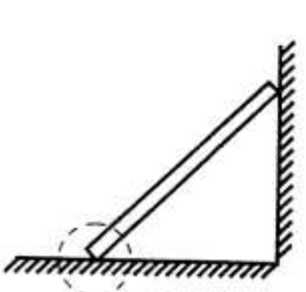
Si todas las fuerzas son coplanares, de las ecuaciones (3.4.5) y (3.4.7), solo serán necesarias las siguientes:

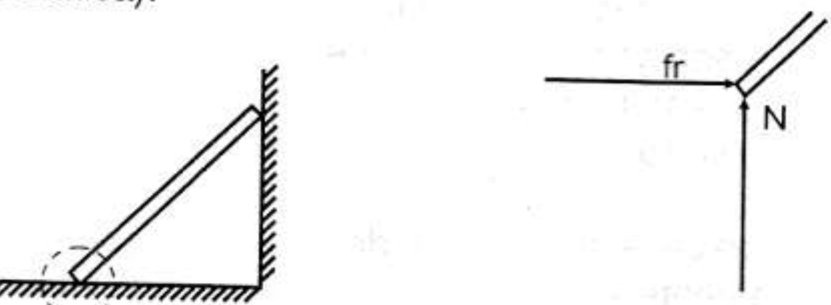
$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma \tau_o = 0$$

Esta última ecuación es realmente $\Sigma\tau_{oz} = 0$, pero como todos los torques están en la dirección (z), se omite el subíndice z.

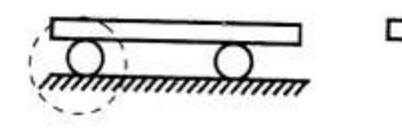
REACCIONES EN LOS APOYOS. Los apoyos más comunes en los cuales se sustentan los sólidos son: de contacto, de rodillo, de pasador y de empotramiento.

- ***Contacto.*** En el contacto se generan dos reacciones, la normal y la fuerza de rozamiento (estática).

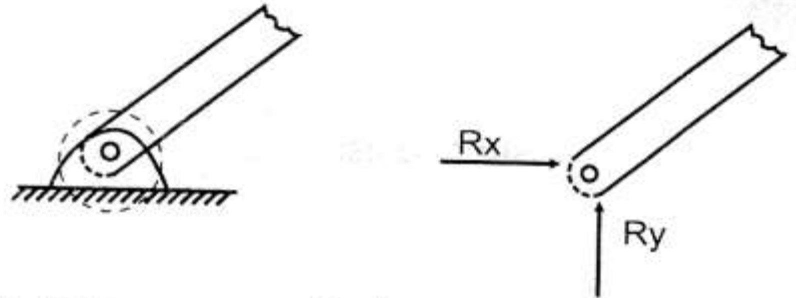




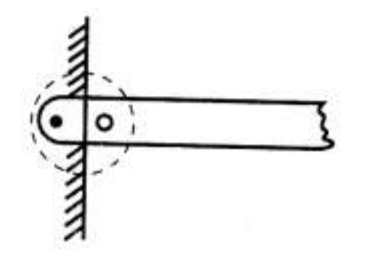
- ***Rodillo.*** El rodillo sólo transmite una fuerza en dirección perpendicular a las superficies de contacto.

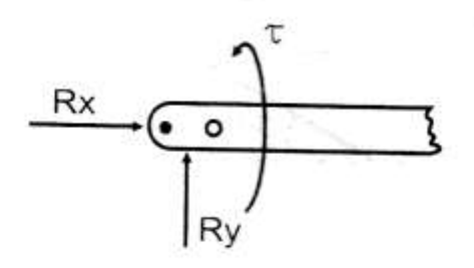


- ***Pasador***. En este apoyo se genera únicamente una fuerza en el mismo plano de las fuerzas aplicadas. Esta reacción se descompone en las direcciones horizontal y vertical (Rx y Ry).
Este apoyo no impide la rotación del cuerpo.



- ***Empotramiento.*** Este apoyo, a más de una fuerza de reacción en el mismo plano de las fuerzas aplicadas, impide la rotación de un cuerpo. lo que significa que puede comunicarle un torque.





REGLAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE EQUILIBRIO DE SÓLIDOS RÍGIDOS.

Al igual que en la resolución de problemas de Dinámica, es conveniente seguir ordenadamente ciertos pasos que faciliten los análisis y resolución de problemas de equilibrio de sólidos rígidos:

1. Aislar el o los cuerpos de interés.

2. Representar gráficamente todas las fuerzas externas actuantes sobre el o los cuerpos de interés éstas son generalmente el peso y las generadas por los apoyos. En el caso de los elementos homogéneos y esbeltos (vigas, varillas, etc.), el peso se considerará concentrado en su centro.

   Cuando no se conoce con certeza el sentido de alguna o algunas de las fuerzas, se lo puede elegir arbitrariamente. Si en la solución resulta que la fuerza tiene un valor negativo, significa que el verdadero sentido es el opuesto al elegido.

3. Elegir un sistema de referencia adecuado, en el cual se puedan descomponer las fuerzas aplicadas al sólido.

4. Aplicar las dos condiciones de equilibrio:

$$\text{Primera}\begin{cases}\Sigma F_x = 0\\ \Sigma F_y = 0\end{cases}$$

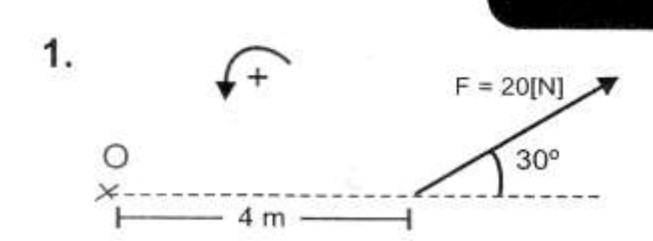
$$\text{Segunda}\ \left[\ \Sigma \tau_o = 0\right.$$

   En el caso de la segunda condición, el punto donde se calcula el torque resultante puede ser cualquiera, pero es preferible elegir uno donde estén aplicadas el mayor número de fuerzas incógnitas, puesto que así su torque con respecto a ese punto será nulo.

5. Resolver el sistema de ecuaciones que permita calcular el valor de las incógnitas y analizar los resultados.

EJEMPLOS

1.

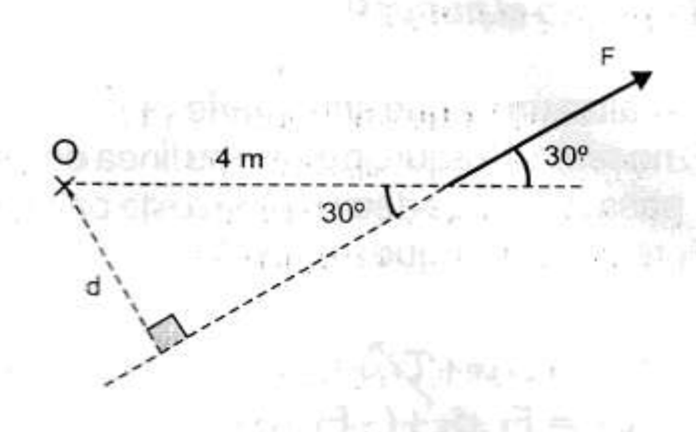


Calcular el torque de la fuerza de la figura, respecto del punto 0, por tres métodos diferentes.

El torque de esta fuerza trata de hacer girar el sistema en sentido antihorario, por lo que según la convención definida anteriormente, tendrá un signo positivo.

a) Por la definición de torque:

$\tau_o = F.r.\text{sen}\theta$
$\tau_o = 20[N].4m.\text{sen}30°$
$\tau_o = 40[N]$

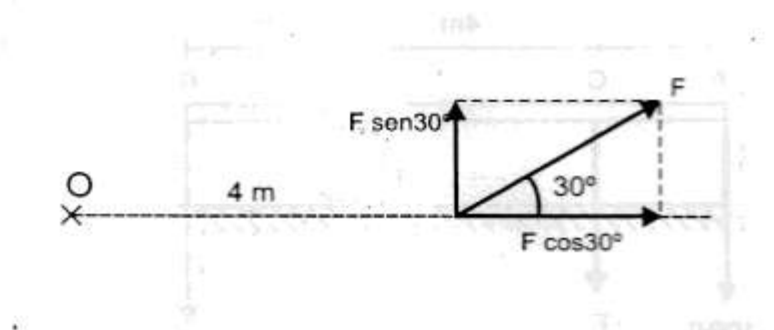


b) Calculando el brazo de palanca:

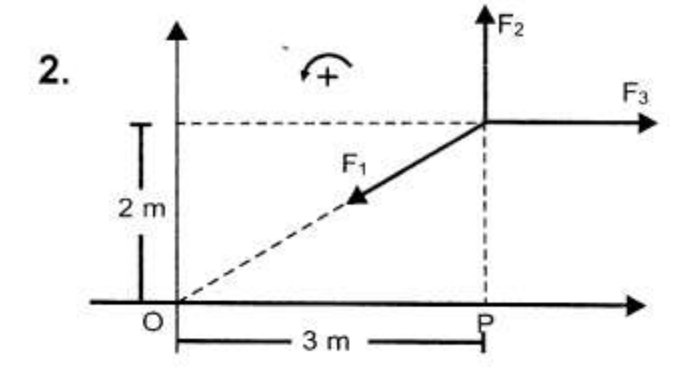
$d = 4m.\text{sen}30°$
$d = 2m$
$\tau_o = F.d$
$\tau_o = 20[N].2m$
$\tau_o = 40[N]$

c) Descomponiendo la fuerza según las direcciones x e y, calculando la suma de los torques de estas componentes:

$\tau_o = \tau_{x/o} + \tau_{y/o}$
$\tau_o = F.\cos30°(0m) + F\text{sen}30°(4m)$
$\tau_o = 20[N].\text{sen}30°4m$
$\tau_o = 40[N]$

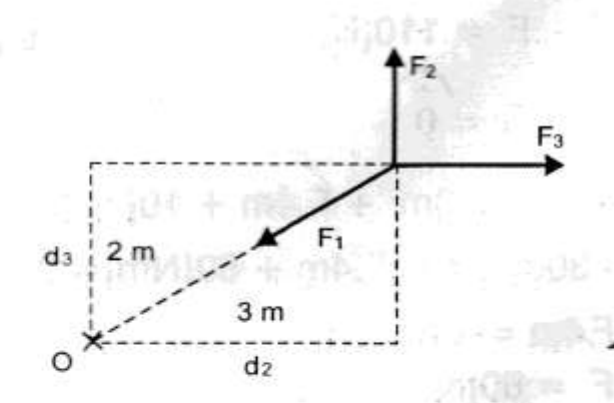


2.



En la figura $F_1 = 10[N]$, $F_2 = 5[N]$ y $F_3 = 12[N]$. Calcular el torque resultante con respecto a los punto O y P.

Respecto al punto 0:



F_1 no realiza torque, porque su brazo de palanca es cero.
F_2 realiza un torque antihorario (+)
F_3 realiza un torque horario (-).

$\tau_o = \tau_{F1/o}^{\nearrow 0} + \tau_{F2/o} + \tau_{F3/o}$

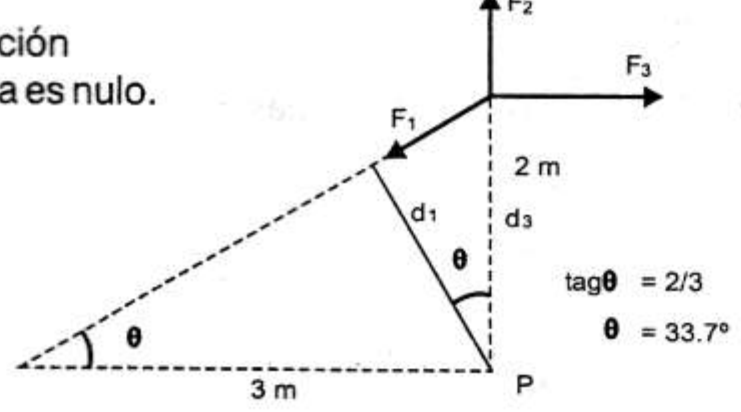
$\tau_o = F_2 . d_2 + (- F_3 . d_3)$

$\tau_o = 5[N]3m - 12[N].2m$

$\tau_o = -9[Nm]$

Respecto al punto P:

F_1 realiza un torque antihorario (+).
F_2 no realiza torque, porque su línea de acción pasa por P, es decir su brazo de palanca es nulo.
F_3 realiza un torque horario (-).



$\tau_P = \tau_{F1/P} + \tau_{F2/P}^{\nearrow 0} + \tau_{F3/P}$

$\tau_P = F_1 . d_1 + (- F_3 . d_3)$

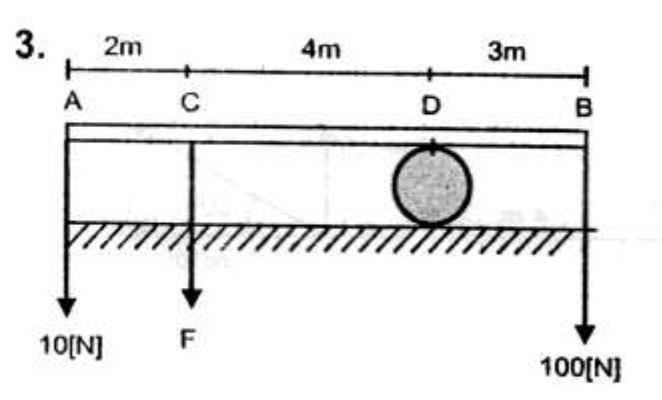
$\tau_P = 19[N]2m.\cos\theta - 12[N].2m$

$\tau_P = -7,36[Nm]$

3. El sistema de la figura está en equilibrio. Si el peso de la varilla: AB es despreciable, determinar:

a) El valor de la fuerza F aplicada en el punto C.

b) El valor de la fuerza que realiza el rodillo sobre la varilla en el punto D.



a) $\Sigma F_y = 0$

$- 10[N] - F - 100[N] + R = 0$

$R - F = 110[N] \qquad (1)$

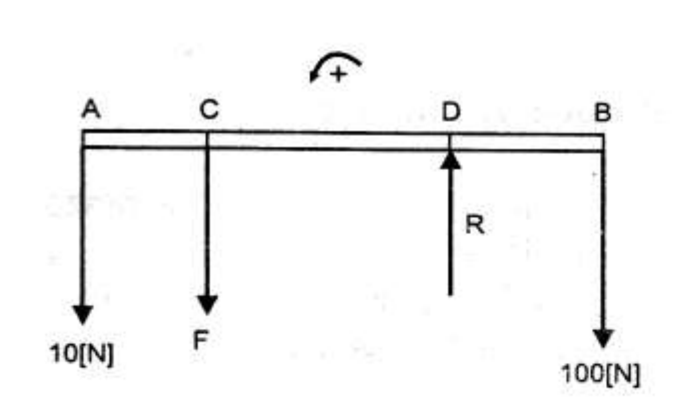
$\Sigma \tau_D = 0 \quad (+ \curvearrowleft)$

$- 100[N].3m + F.4m + 10[N].6m = 0$

$- 300[Nm] + F.4m + 60[Nm] = 0$

$F.4m = 240[Nm]$

$F = 60[N]$



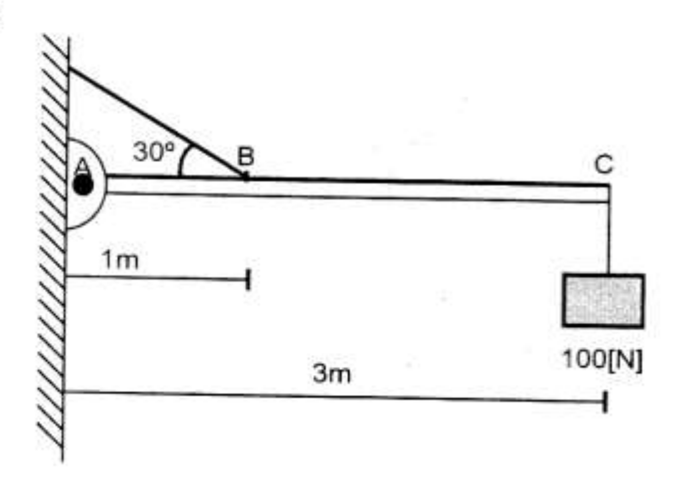
b) Reemplazando en (1) :

$R - F = 110[N]$

$R - 60[N] = 110[N]$

$R = 170[N]$

4.



La viga homogénea de la figura tiene un peso de 500 [N] y está articulada en A. Determinar:

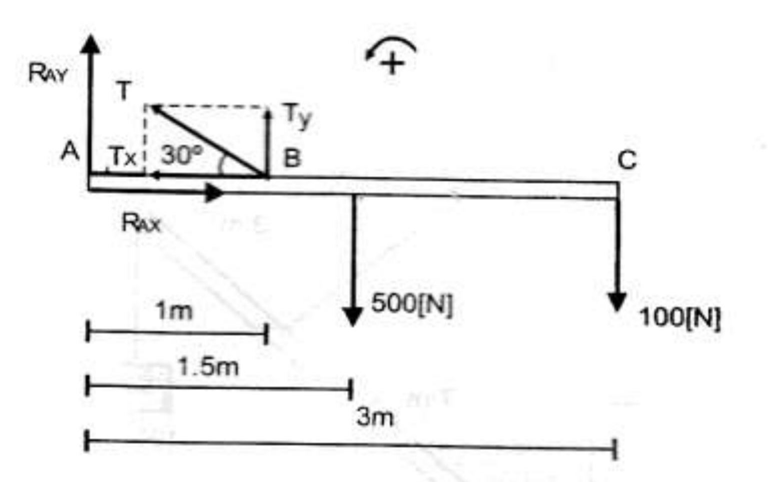
a) La tensión en el cable que sostiene la viga.

b) La reacción del pasador A sobre la viga.

a)

$T_x = T.\cos 30°$

$T_y = T.\text{sen}30°$



$\Sigma F_x = 0$

$-T_x + R_{AX} = 0$

$R_{AX} - T.\cos 30° = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0$

$R_{Ay} + T_y - 500[N] - 100[N] = 0$

$R_{Ay} + T.\text{sen}30° = 600[N]$ (2)

$\Sigma \tau_A = 0$ (+)

$T_y .1m - 500[N].1,5m - 100[N].3m = 0$

$T_y = 1050[N]$

$T.\text{sen}30° = 1050[N]$

$T = 2100[N]$

b) Reemplazando en (1) y en (2) :

(1) $R_{AX} - T.\cos 30° = 0$

$R_{AX} = T.\cos 30°$

$R_{AX} = 2100[N]\cos 30°$

$R_{AX} = 1818,65[N]$

(2) $R_{Ay} + T.\text{sen}30° = 600 [N]$

$R_{Ay} = 600[N] - T.\text{sen}30°$

$R_{Ay} = 600[N] - 2100[N].\text{sen } 30°$

$R_{Ay} = -450[N]$,

esto significa que R_{Ay} esta dirigido hacia abajo

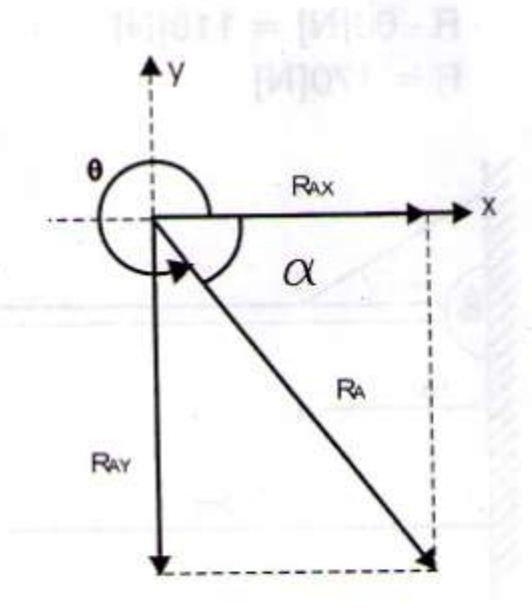
$R_A^2 = R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2$
$R_A^2 = (1818,65[N])^2 + (-450[N])^2$
$R_A = 1873,5[N]$

$$\tan \alpha = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}}$$

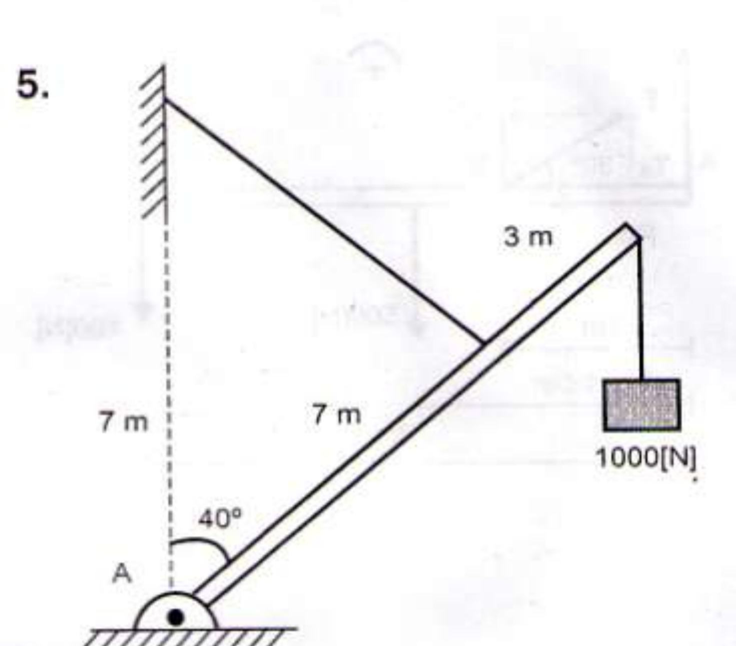
$$\tan \alpha = \frac{450[N]}{1818,65[N]} \; ; \alpha = 13.9°$$

$\theta = 346,1°$

$\vec{R}_A = (1873,5[N]; 346.1°)$



5.



En la figura, la pluma es de 680 [N] y tiene su centro de gravedad en el punto medio de su longitud. Determinar:

a) La tensión del cable.
b) La reacción del pasador A sobre la pluma.

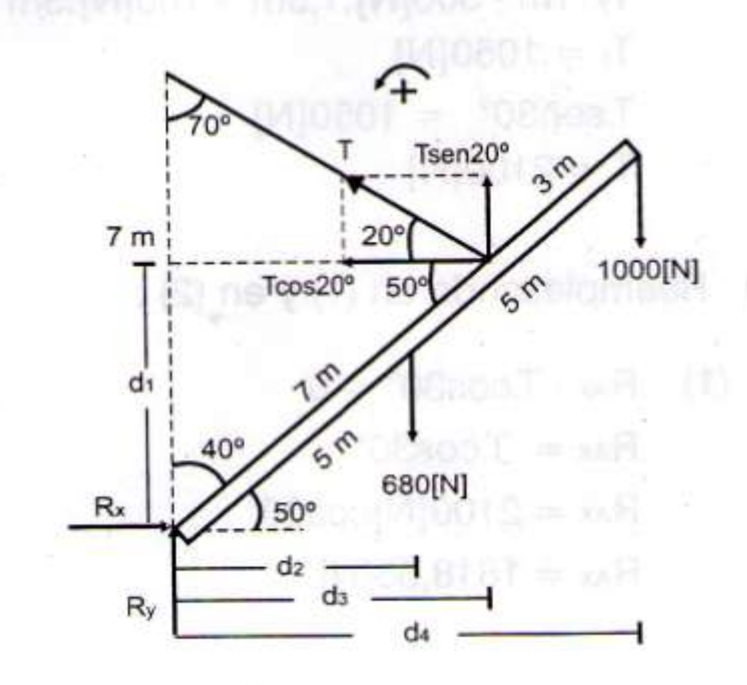
a)

$d_1 = 7m.\text{sen}50°$
$d_1 = 5,36m$

$d_2 = 5m.\cos50°$
$d_2 = 3,21m$

$d_3 = 7m.\cos50°$
$d_3 = 4,5m$

$d_4 = 10m.\cos50°$
$d_4 = 6,43m$



$\Sigma \tau_A = 0$ (↺+)

$- 680[N].d_2 + T.\cos 20° .d_1 + T.\text{sen } 20°.d_3 - 1000[N].d_4 = 0$

$- 680[N].3{,}21m + T.\cos 20°.5.36\ m + T.\text{sen}20°.4{,}5\ m - 1000[N].6{,}43m = 0$

$5{,}04T[m] + 1{,}54T[m] = 2182{,}8[Nm] + 6430[Nm]$

$6{,}58T[m] = 8612{,}8[Nm]$

$T = 1308{,}94[N]$

b)

$\Sigma F_x = 0$

$R_x - T.\cos 20° = 0$

$R_x = T.\cos 20°$

$R_x = 1230[N]$

$\Sigma F_y = 0$

$R_y + T.\text{sen}20° - 680[N] - 1000[N] = 0$

$R_y = 1680[N] - T.\text{sen}20°$

$R_y = 1232{,}32[N]$

$R^2 = R_x^2 + R_y^2$

$R^2 = (1230[N])^2 + (1232{,}32\ [N])^2$

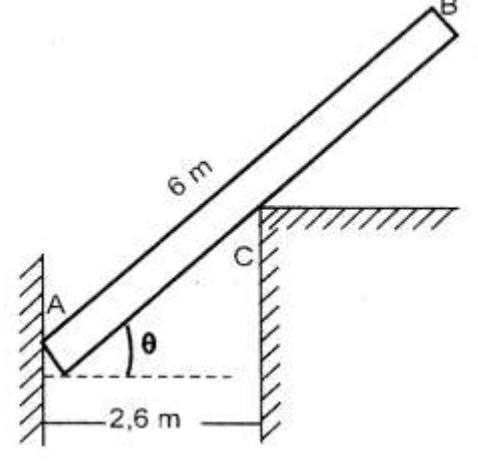
$R = 1741{,}12[N]$

$\vec{R} = (1741{,}12[N];45{,}05°)$

$\text{tag } \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{1232{,}32[N]}{1230[N]}$

$\alpha = 45{,}05°$

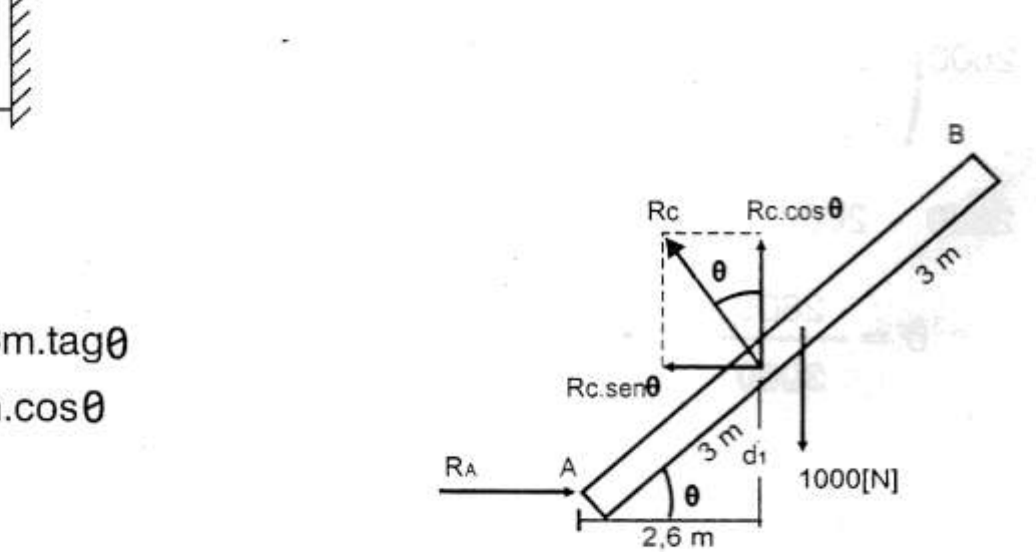
6.



En la figura, la viga AB de 100[N] tiene su centro de gravedad en el punto medio de su longitud. La reacción en C es perpendicular a la viga y la pared vertical de la izquierda es lisa. Determinar el valor de θ para que la viga esté en equilibrio.

$d_1 = 2{,}6m.\text{tag}\theta$

$d_2 = 3m.\cos\theta$



$\Sigma\tau_A = 0$ (+ ↺)

$R_C.\text{sen}\,\theta.d_1 + R_C.\cos\theta.2{,}6\text{ m} - 1000[N].d_2 = 0$

$R_C.\text{sen}\,\theta.2{,}6\text{m}.\text{tag}\,\theta + R_C.\cos\theta.2{,}6\text{ m} - 1000[N].3\text{ m}.\cos\theta = 0$ (1)

$\Sigma F_x = 0$

$R_A = R_C.\text{sen}\,\theta$ (2)

$\Sigma F_y = 0$

$R_C.\cos\theta - 1000[N] = 0$

$$R_C = \frac{1000[N]}{\cos\theta} \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$R_C.\text{sen}\,\theta.2{,}6[m].\text{tag}\,\theta + R_C.\cos\theta.2{,}6[m] - 1000[N].3[m].\cos\theta = 0$

$$\frac{1000[N]}{\cos\theta}.\text{sen}\,\theta.2{,}6[m]\,\text{tag}\,\theta + \frac{1000[N]}{\cos\theta}.\cos\theta.2{,}6[m] - 3000[Nm].\cos\theta = 0$$

$2600[N].\text{tag}^2\theta + 2600[Nm] - 3000[Nm].\cos\theta = 0$

$$\text{Como } \text{tag}^2\theta = \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$2600\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right) + 2600 - 3000.\cos\theta = 0$$

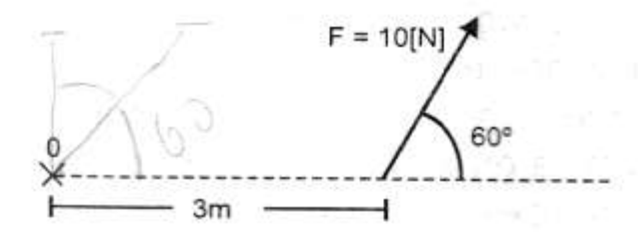
$2600 - 2600\cos^2\theta + 2600.\cos^2\theta - 3000.\cos^3\theta = 0$

$$\cos^3\theta = \frac{2600}{3000} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 17{,}56°$$

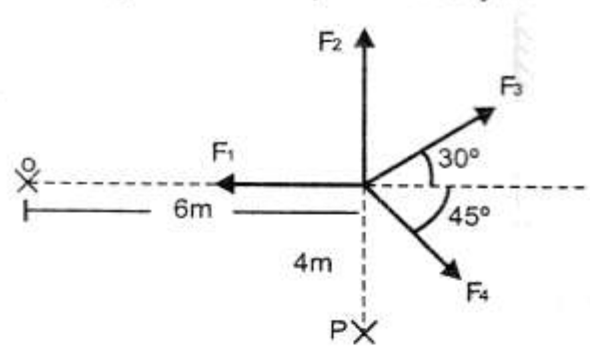
$\theta = 17{,}56°$

EJERCICIO Nº 15

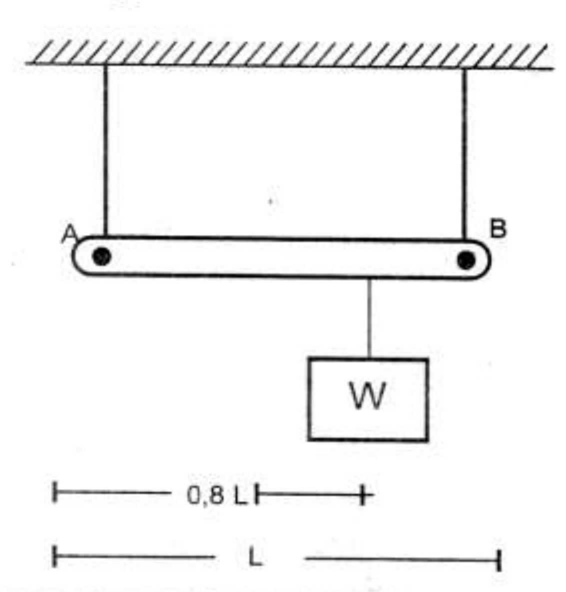
1. Calcular el torque de la fuerza F de la figura respecto del punto 0 por tres métodos diferentes.



2. En la figura: $F_1 = 35[N], F_2 = 30[N], F_3 = 50[N]$ y $F_4 = 40[N]$. Calcular el torque resultante respecto a los puntos O y P.

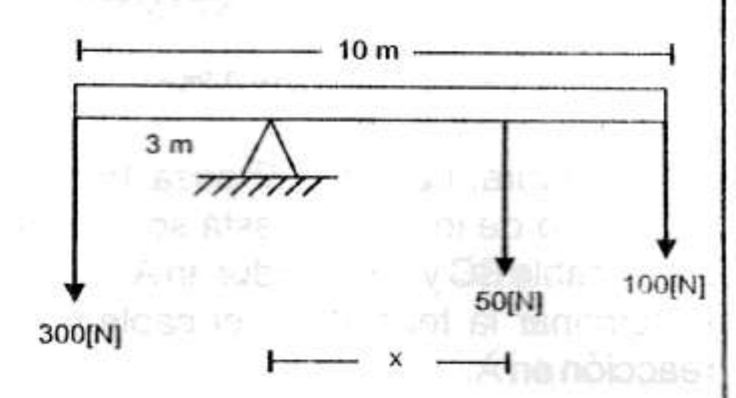


3. La viga horizontal AB de la figura es uniforme y pesa 200 [N]. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas que soportan la viga, cuando se cuelga un peso W = 100[N] en la posición indicada en la figura.

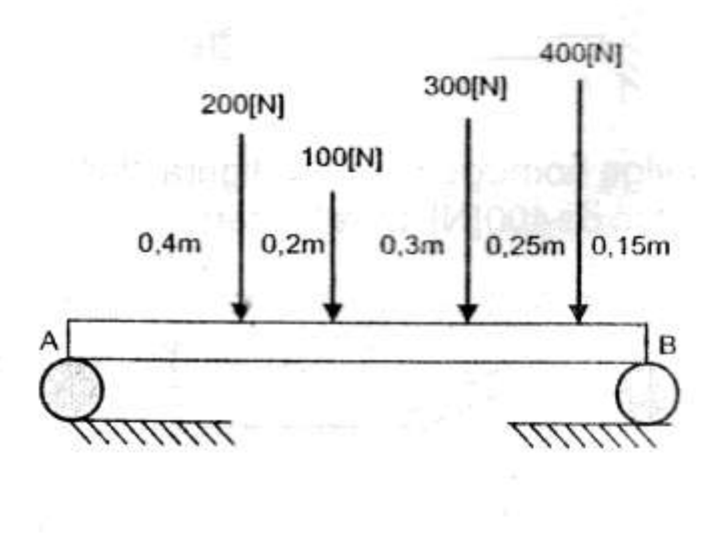


4. Una regla graduada de 1 m, se equilibra con un apoyo en su centro. Si se coloca un cuerpo de masa 100 g en la marca de 80 cm, ¿en qué marca deberá colocarse otra masa de 60 g para que la regla siga en equilibrio?

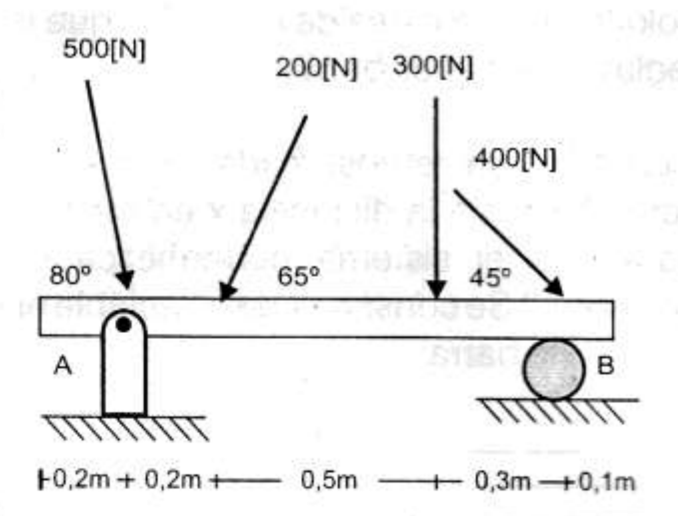
5. En la figura representada,¿cuál debe ser el valor de la distancia x en metros, para que el sistema permanezca en equilibrio? Se considera despreciable el peso de la barra.



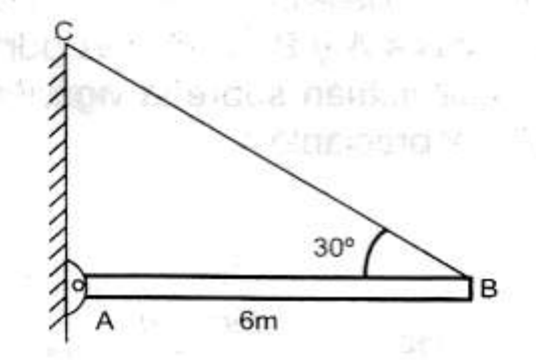
6. En la figura, determinar las reacciones en los apoyos A y B, causadas por las cargas que actúan sobre la viga, cuyo peso es despreciable.



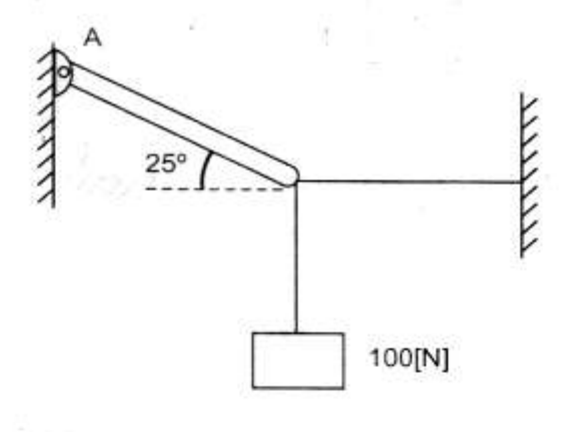
7. En la figura, determinar las reacciones en los apoyos A y B, causadas por las cargas que actúan sobre la viga de peso despreciable.



8. En la figura, la barra AB pesa 150[N] por metro de longitud y está sostenida por el cable BC y un pasador en A. Determinar la tensión en el cable y la reacción en A.

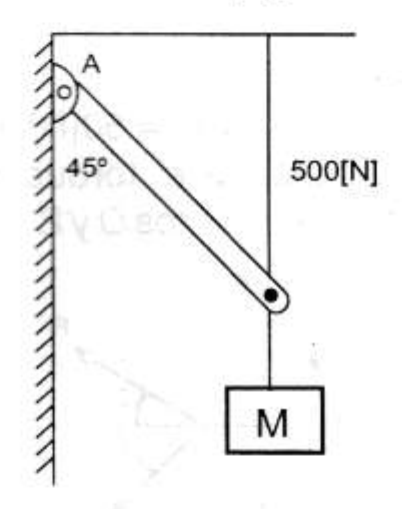


9. La viga homogénea de la figura, tiene un peso de 400[N]. Determinar:



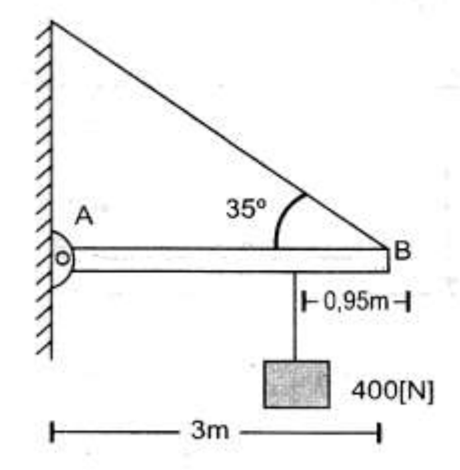
a) La fuerza que hace el pasador A sobre la viga.
b) La tensión en el cable horizontal.

10. Una viga uniforme de 15 kg está articulada en A y sostenida en su otro extremo por un alambre, como se muestra en la figura. Si la tensión en el alambre es de 500[N], determinar:



a) El valor de la masa M, que sostiene la viga.
b) Cuál es la fuerza que hace el pasador A, sobre la viga.

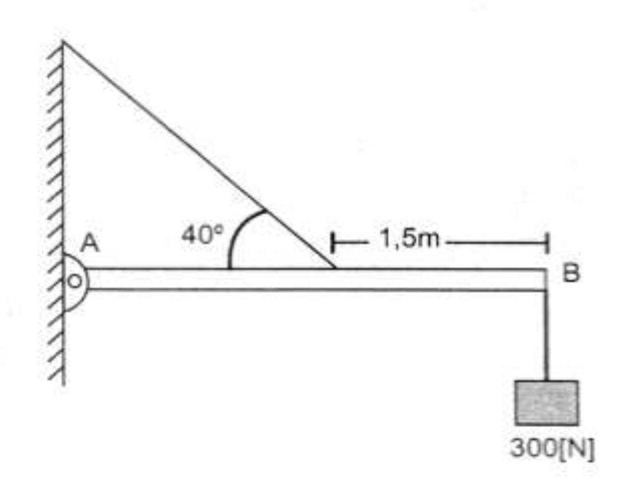
11. En la figura, la viga AB tiene un peso de 300[N] por metro de longitud. Determinar:



a) La tensión sobre el cable.
b) La fuerza del pasador A sobre la viga.

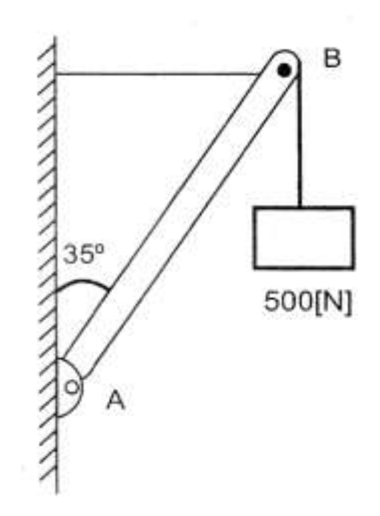
EJERCICIO Nº 15

12. En la figura, la barra AB de 200[N] de peso y 6 m de longitud, está pivoteada en el extremo izquierdo. Determinar:



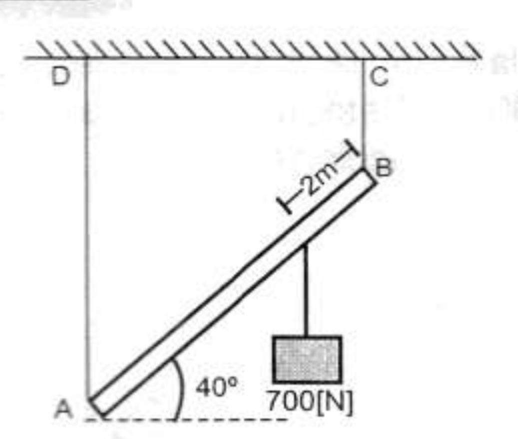
a) La tensión en el cable de apoyo.
b) La fuerza del pasador A sobre la barra.

13. En la figura, la viga AB tiene un peso de 800 [N]. Determinar:

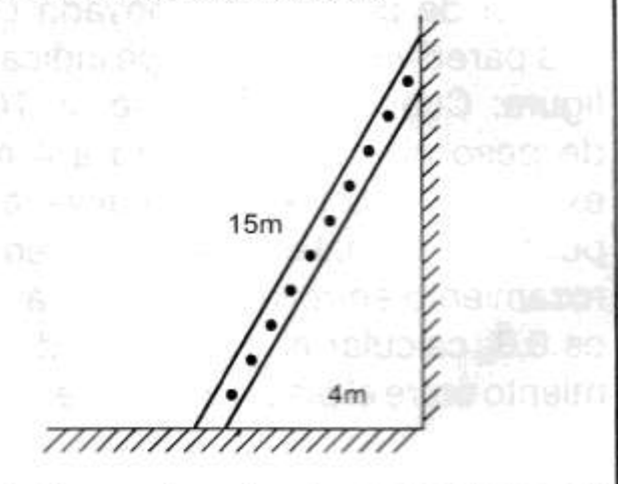


a) La tensión en el cable de apoyo.
b) La fuerza del pasador A sobre la viga.

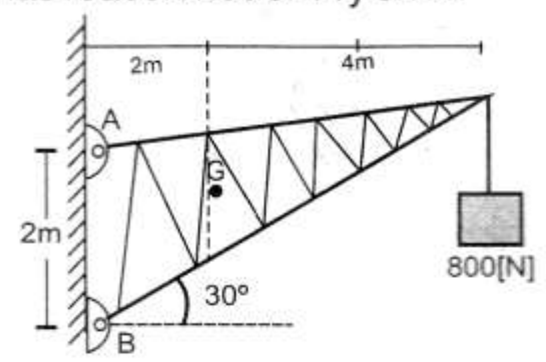
14. La barra AB de 250[N], y 10 m de longitud, se mantiene en la posición de la figura por la acción de dos cuerdas AD y BC. Si se coloca un peso de 700[N] a 2m del extremo superior, determinar las tensiones en las cuerdas.



15. Una escalera de 15 m de longitud tiene una masa de 20 kg. Descansa contra una pared vertical lisa, y su parte inferior se encuentra en el piso a 4 m de la pared. ,Cuál debe ser el coeficiente mínimo de fricción estática entre la escalera y el suelo, para que una persona de 80 kg pueda subir con seguridad hasta el 70% de la escalera?

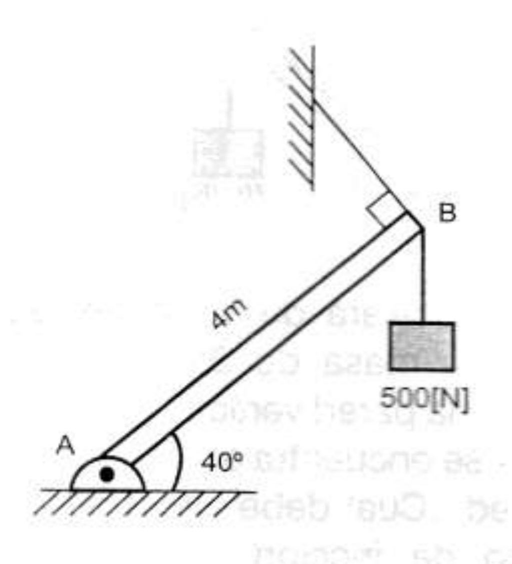


16. En la figura, la grúa de 6OOO[N] está sostenida por medio de dos pasadores A y B, siendo liso el A. Si el centro de gravedad está localizado en B, determinar las reacciones en A y en B.

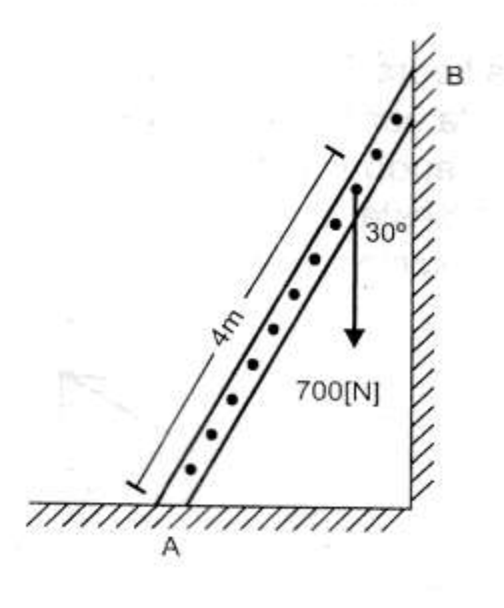


EJERCICIO Nº 15

17. En la figura, la barra AB tiene un peso de 400[N]. Determinar la tensión en el cable y la reacción en A.



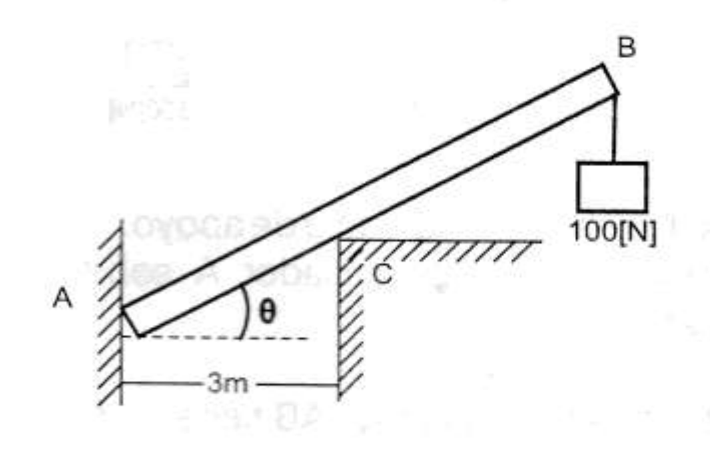
18. Una escalera de 5 m de longitud y 100[N) de peso, está apoyada contra una pared vertical, como se indica en la figura: Cuando un hombre de 700[N) de peso alcanza un punto a 4 m del extremo inferior A, la escalera está a punto de resbalar. Si el coeficiente de rozamiento entre la escalera y la pared es 0,3, calcular el coeficiente de rozamiento entre el piso y la escalera.



19. En la figura, la viga AB de peso despreciable y 10m de longitud, está apoyada en una pared vertical A y en una esquina C perfectamente lisas. Determinar:

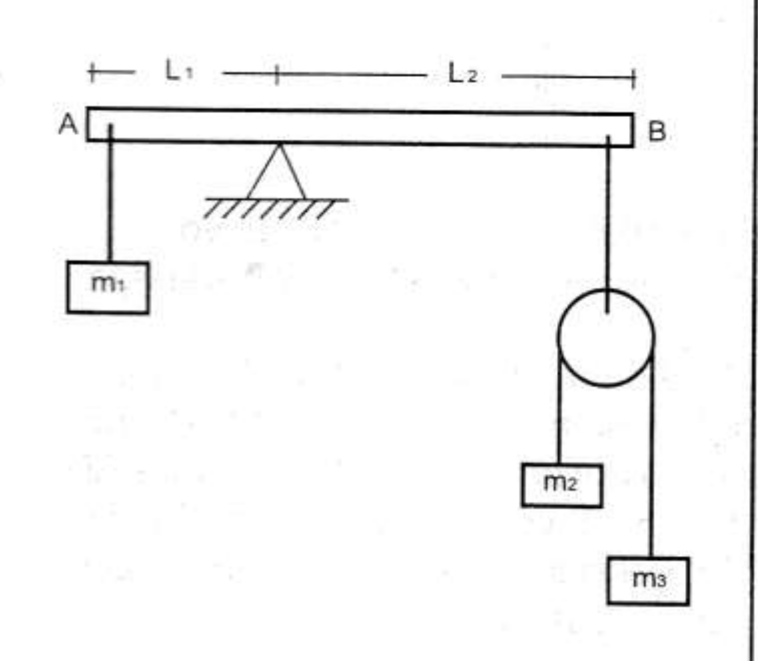
a) El ángulo θ para que la viga esté en equilibrio.

b) Las reacciones en los puntos de apoyo.



20. En el sistema de la figura, si m3 es mayor que m_2, demuestre que:

$m_1(m_2 + m_3)L_1 = 4m_2.m_3.L_2$, para que la varilla AB de masa despreciable esté en equilibrio.



3.5 EVALUACIÓN OBJETIVA

COMPLETAR

1. Toda fuerza se origina por la ______________________________ entre dos cuerpos.

2. La interacción gravitatoria entre un cuerpo y la Tierra se denomina ______________ ________________ del cuerpo.

3. La fuerza de rozamiento tiene una dirección opuesta al movimiento ______________ ______________ o a su tendencia entre dos cuerpos en contacto.

4. La fuerza normal tiene una dirección ____________________________ a las superficies en contacto.

5. La fuerza de rozamiento tiene una dirección ____________________________ a las superficies en contacto.

6. La fuerza de rozamiento estática es ____________________________ y la ciné tica es ________________________________ dentro de un cierto rango de velocidades.

7. El coeficiente de rozamiento estático es ligeramente __________________________ que el coeficiente de rozamiento cinético entre dos cuerpos.

8. La fuerza elástica es directamente proporcional a la __________________________ y tiene sentido ______________________ a ésta.

9. Las cuerdas siempre ejercen fuerzas de ____________________________ sobre los cuerpos a los cuales están atadas.

10. Si la fuerza neta aplicada sobre una partícula es nula, ésta se encuentra en ________

________________ o en ________________.

11. En mecánica, la masa es un cuantificador de ________________ del cuerpo.

12. La aceleración de una partícula es ________________ proporcional a la fuerza neta aplicada a ésta y tiene ________________ dirección.

13. La aceleración de una partícula es ________________ proporcional al valor de la masa.

14. Toda fuerza neta, diferente de cero, aplicada a una partícula, comunica a ésta una ________________.

15. Las fuerzas de acción y reacción actúan sobre cuerpos ________________

16. La fuerza que ejerce la Tierra sobre la Luna es ________________ a la que la Luna ejerce sobre la Tierra, y sus sentidos son. ________________

17. Para que una partícula se encuentre en equilibrio es necesario y suficiente que la fuerza neta aplicada a ésta sea ________________.

18. El ***diagrama del cuerpo libre*** de una partícula, consiste en ________________. el cuerpo de interés y graficar sobre éste todas ________________ externas actuante s sobre él.

19. Al analizar el movimiento de partículas interconectadas es necesario tomar en cuenta a más de las relaciones dinámicas, las relaciones de tipo ________________.

20. La fuerza neta que actúa sobre una partícula con movimiento circular está contenida en ______________________ del movimiento.

21. Si una partícula se mueve en una trayectoria circular la fuerza neta que actúa sobre ella es ______________________ cero.

22. Si una partícula tiene un MCU, la fuerza neta que sobre ella actúa tiene una dirección ______________________ a la velocidad.

23. La fuerza tangencial que actúa sobre una partícula con MCU es ______________________.

24. El módulo de la fuerza neta que actúa sobre una partícula con MCU es ______________________.

25. La fuerza centrípeta que actúa sobre una partícual con MCU es ______________________.

26. El módulo de la fuerza tangencial que actúa sobre una partícula con MCUV es ______________________.

27. Si una partícula gira con MCUV acelerado, el ángulo formado entre la fuerza neta y la velocidad es ______________________.

28. Una partícula gira con MCUV. Si el radio de su trayectoria aumenta al doble, el módulo de la fuerza tangencial es ______________________ del original.

29. El torque de una fuerza es nulo para cualquier punto de ______________________ de la fuerza, puesto que el brazo de palanca sería ______________________.

30. Si la fuerza neta que actúa sobre un sólido es nula, éste no tiene un movimiento de ______________________ y si el torque neto es nulo el cuerpo no posee movimiento de ______________________.

ESCRIBIR (V) VERDADERO O FALSO (F)

1. La fuerza mide el grado de interacción entre dos cuerpos .... ( )

2. El peso de un cuerpo es el mismo en la Tierra y en la Luna .... ( )

3. La masa de un cuerpo es menor en la Luna que en la Tierra .... ( )

4. El peso de un cuerpo siempre tiene una dirección perpendicular a las superficies en contacto .... ( )

5. La normal es una fuerza dirigida siempre verticalmente hacia arriba .... ( )

6. La fuerza de rozamiento tiene una dirección perpendicular respecto a la fuerza normal .... ( )

7. La fuerza de rozamiento tiene una dirección tangente a las superficies en contacto y su sentido es el opuesto al del movimiento relativo o de su tendencia, de un cuerpo sobre el otro .... ( )

8. La fuerza de rozamiento estática es variable .... ( )

9. La fuerza de rozamiento cinética es constante, dentro de un cierto rango de velocidades de deslizamiento entre dos cuerpos .... ( )

10. De manera general, el coeficiente de rozamiento estático es ligeramente menor que el cinético .... ( )

11. La fuerza de recuperación elástica es directamente proporcional a la deformación y tiene su mismo sentido .... ( )

12. La fuerza de recuperación elástica tiene un sentido opuesto a la deformación. . ( )

13. Las cuerdas y demás elementos flexibles, únicamente transmiten fuerzas de tracción (tensión) sobre el cuerpo al cual están aplicadas .... ( )

14. Si la fuerza neta aplicada sobre una partícula es nula, ésta únicamente puede pennanecer en reposo .... ( )

15. Si una partícula se mueve con MRU la fuerza neta aplicada será constante y diferente de cero .... ( )

16. Sobre una partícula actúa un sistema de fuerzas, entre éstas la de rozamiento siendo la fuerza neta cero. En estas condiciones la partícula se moverá desaceleradamente hasta detenerse .... ( )

17. La velocidad de una partícula varía únicamente cuando sobre ella actúa una fuerza neta diferente de cero .... ( )

18. Las fuerzas de acción y reacción actúan sobre el mismo cuerpo .... ( )

19. El peso y la normal son fuerzas de acción y reacción .... ( )

20. Siempre que un cuerpo se mueva sobre una superficie horizontal la normal tiene el mismo valor que el peso .... ( )

21. La fuerza neta actuante sobre una partícula puede tener sentido opuesto al movimiento .... ( )

22. La fuerza neta que actúa sobre una partícula con movimiento parabólico es constante .... ( )

23. La fuerza neta que actúa sobre una partícula con MCU es nula .... ( )

24. La fuerza neta que actúa sobre una partícula con MCU es perpendicular a la velocidad .... ( )

25. La fuerza neta que actúa sobre una partícula con MCU es constante en módulo, pero su dirección es variable .... ( )

26. La fuerza neta que actúa sobre una partícula con MCUV tiene una dirección perpendicular a la velocidad .... ( )

27. Si una partícula está animada de MCUV acelerado, la fuerza neta actuante sobre ella forma un ángulo agudo con la velocidad .... ( )

28. La fuerza tangencial que actúa sobre una partícula con MCUV es constante en módulo, pero su dirección es variable .... ( )

29. Las leyes de Newton sólo se aplican en los movimientos rectilíneos .... ( )

30. Si la fuerza neta que actúa sobre un sólido es nula, ningún punto de éste puede moverse aceleradamente .... ( )

SUBRAYAR LA RESPUESTA CORRECTA

1. El peso de un cuerpo es una fuerza dirigida hacia:

a) Arriba.
b) Abajo.
c) El centro de la Tierra.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

2. La aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es aproximadamente la sexta parte de la que actúa en la superficie de la Tierra.
La masa de un cuerpo en la Luna será:

a) Seis veces mayor que en la Tierra.
b) Igual a la que tiene en la Tierra.
c) La sexta parte que en la Tierra.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

3. La fuerza normal es:

a) La única fuerza que se genera por el contacto mecánico entre dos cuerpos.
b) Perpendicular a las superficies en contacto.
c) Paralela a las superficies en contacto.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

4. La fuerza de rozamiento que actúa sobre un cuerpo:

a) Siempre se opone al movimiento de éste.
b) Es perpendicular a las superficies en contacto.
c) Es paralela a las superficies en contacto.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

5. La fuerza de rozamiento tiene una dirección:

a) Horizontal.
b) Vertical.
c) Perpendicular a la fuerza normal.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

6. La fuerza de rozamiento estática es:

a) Nula.
b) Constante.
c) Variable.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

7. La fuerza de recuperación elástica:

a) Es directamente proporcional a la deformación y tiene su misma dirección.
b) Es inversamente proporcional a la deformación y tienen una dirección opuesta.
c) Es directamente proporcional a la deformación y tienen dirección opuesta.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

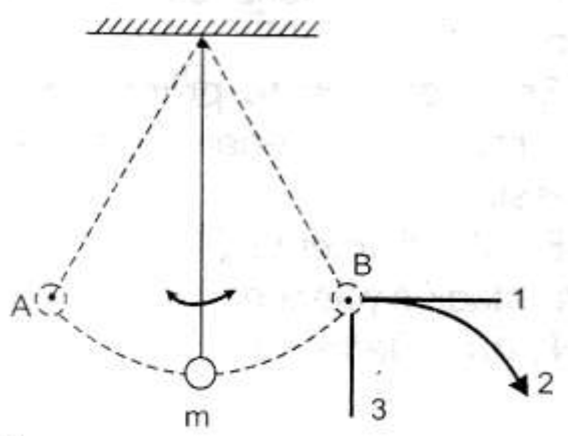
8. Una partícula está en equilibrio si:

a) Está en reposo.
b) La fuerza neta actuante sobre ella es nula.
c) Se mueve con velocidad constante.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

9. Una partícula se mueve con velocidad, constante si:

a) La fuerza neta que actúa sobre ella es nula.
b) La fuerza neta actuante es constante y diferente de cero.
c) La fuerza neta es igual y opuesta al peso.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

10. Un péndulo oscila entre los puntos extremos A y B. Si la cuerda se rompe en el extremo B la trayectoria descrita por la partícula ***m*** será:



a) 1
b) 2
c) 3
d) Ninguna de las respuestas anteriores

11. Tres fuerzas de módulos 6 [N], 9[N] y 10[N], actúan sobre una partícula que está en equilibrio. La resultante de las fuerzas de 6[N] y 10[N], tendrá un módulo de:

a) 16[N]
b) 9 [N]
c) 10[N]
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

12. Si la fuerza neta que actúa sobre una, partícula es constante y diferente de cero:

a) La partícula se trasladará con velocidad constante.
b) Se trasladará con aceleración constante.
c) Podría trasladarse únicamente por una trayectoria rectilínea.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

13. Sobre una partícula actúa una fuerza neta menor que el peso, por lo que la partícula:

a) Se mueve aceleradamente.
b) No se mueve.
c) Se mueve con velocidad constante.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

14. La masa de un cuerpo en Física (en el capítulo de la mecánica) cuantifica:

a) La cantidad de sustancia de un cuerpo.

b) La inercia del cuerpo.
c) El tamaño y forma del cuerpo.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

15. Un par de fuerzas de acción y reacción actúan sobre:

a) El mismo cuerpo.
b) Cuerpos diferentes.
c) El cuerpo de menor masa.
d) Ninguna de las respuestas anteriores,

16. Respecto al peso y la fuerza normal que actúan sobre un cuerpo se podría decir que:

a) Son fuerzas de acción y reacción.
b) El peso es menor que la normal.
c) La normal es menor que el peso.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

17. La Tierra atrae a la Luna con una fuerza F_1, y la Luna atrae a la TIerra con una fuerza F_2. Dichas fuerzas están relacionadas entre sí de la siguiente manera:

a) $\vec{F}_1 > \vec{F}_2$
b) $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$
c) $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

18. Dos cuerpos A y B se mueven debido únicamente a su mutua interacción. Si la masa de A es mayor que la de B, entonces:

a) La aceleración de A es igual a la aceleración de B.
b) La aceleración de A es mayor que la aceleración de B.
c) La aceleración de A es menor que la aceleración de B.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

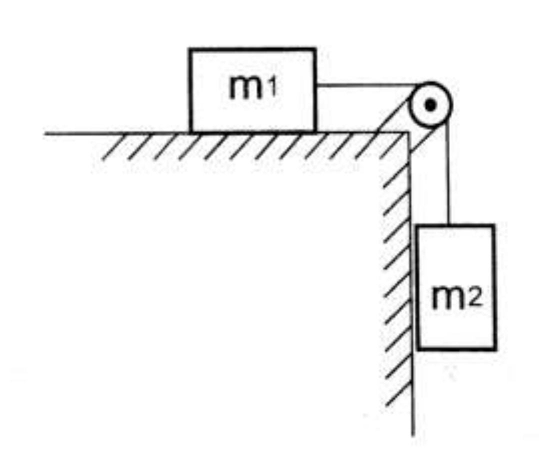
19. Se lanza una piedra contra el vidrio de una ventana. La fuerza que rompe el vidrio es:

a) La fuerza con que se lanzó la piedra.
b) La fuerza que hace el vidrio para detener la piedra.
c) La reacción de la piedra a la fuerza del vidrio.
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

20. Si un cuerpo A de masa m provisto de una velocidad v se detiene luego de recorrer una distancia d sobre una superficie rugosa horizontal, la distancia recorrida sobre el mismo plano por un cuerpo B de masa 9m, provisto de una velocidad $3v$ será:

a) 3 d
b) 9 d
c) d
d) Ninguna de las respuestas anteriores.

21. En el sistema de la siguiente figura desprecie el rozamiento:



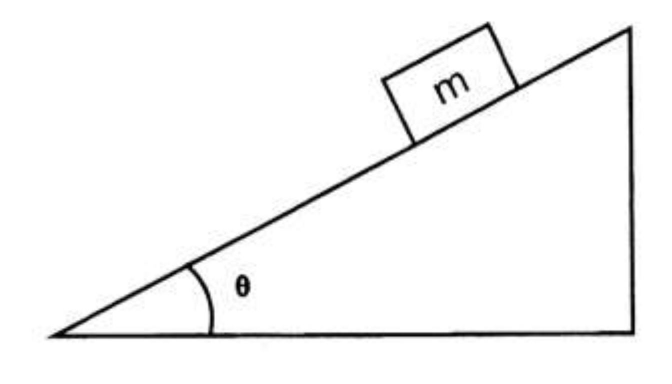
21.1 La aceleración de cada bloque es:

a) $m_1 g/(m_1 + m_2)$
b) $m_2 g/(m_1 + m_2)$
c) g
d) Ninguna

21.2 La tensión en la cuerda es:

a) $(m_1.m_2)g/(m_1 + m_2)$
b) $(m_1 + m_2)g/(m_1.m_2)$.
c) $m_1 g/(m_1 + m_2)$.
d) Ninguna.

22. El bloque de masa m se desliza hacia abajo por el plano inclinado liso de la figura.



22.1 La aceleración del bloque será:

a) g
b) g sen θ
c) g cos θ
d) Ninguna.

22.2 La fuerza que hace el bloque sobre el plano inclinado tendrá un valor de:

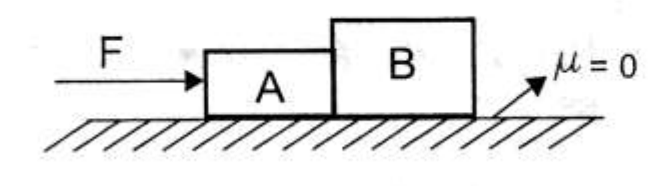
a) m g sen θ
b) mg
c) m g cos θ
d) Ninguna.

22.3 La fuerza neta que actúa sobre el bloque es:

a) m g sen θ
b) m g (1 - cosθ)
c) mg .
d) Ninguna.

23. Al sistema mostrado en la figura se le aplica una fuerza F = 30 [N]. La reacción del bloque B sobre el bloque A tiene un valor de:

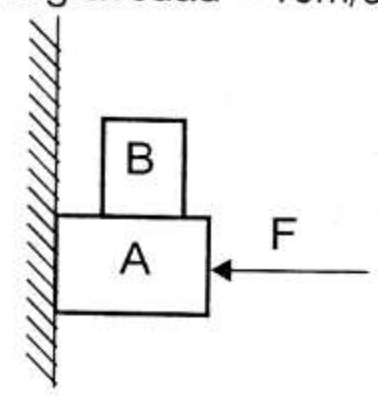
$m_A = 5kg$
$m_B = 10kg$



a) 30[N]
b) 20[N]

c) 10[N]
d) Ninguna.

24. En la figura, A pesa 20[N], B pesa 10[N]; el coeficiente de rozamiento entre A y la pared es de 0,4 y el sistema está descendiendo con una aceleración de 2 m/s .
Usar la gravedad = 10m/s



24.1 El valor de la fuerza F es:

a) 20[N]
b) 30[N]
c) 4O[N]
d) Ninguna.

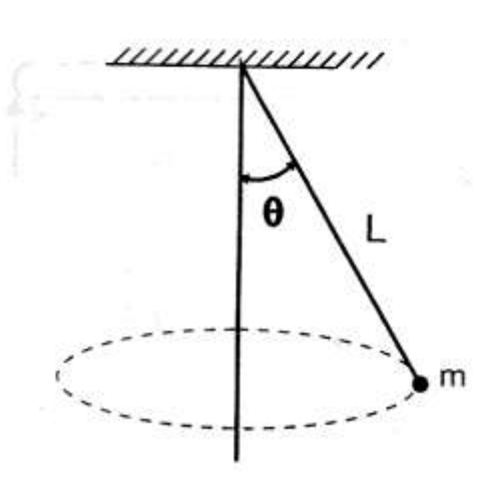
24.2 La fuerza que ejerce el bloque A sobre el bloque B es de:

a) 8[N]
b) 10[N]
c) 16[N]
d) Ninguna.

25. La fuerza neta que actúa sobre una partícula con MCU es:

a) Constante en módulo y dirigida hacia el centro de la trayectoria.
b) Nula.
c) Variable en módulo y tangente a la trayectoria.
d) Ninguna.

26. Se hace girar un cuerpo de masa m en una circunferencia horizontal como se indica en la figura, sujeta a una cuerda de longitud L y con una rapidez v constante. Si la cuerda forma un ángulo θ con la vertical se tendrá que:



26.1 La tensión en la cuerda es:

a) mg
b) $mg\cos\theta$
c) $mg/\cos\theta$
d) Ninguna.

26.2 El valor de la velocidad v es:

a) $\sqrt{L\,g\,\mathrm{sen}^2\theta/\cos\theta}$

b) $\sqrt{L\,g\,\mathrm{tag}\,\theta}$

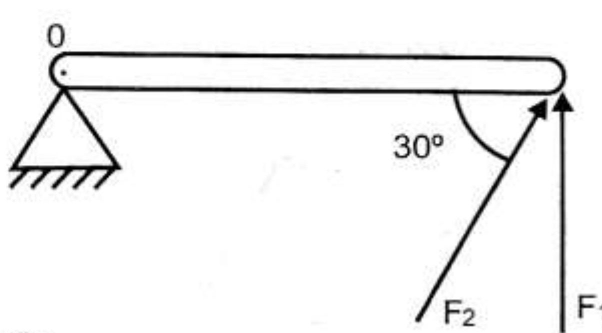
c) $\sqrt{Lg}$
d) Ninguna.

27. Un sólido está en equilibrio si:

a) La fuerza neta actuante sobre él es nula.

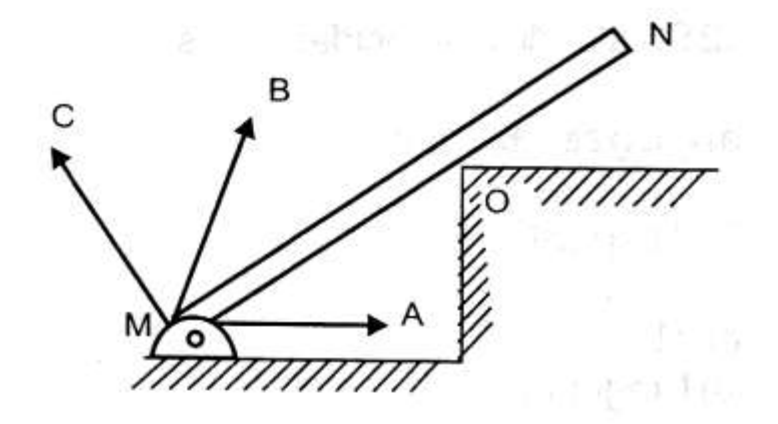
b) La fuerza y el torque netos actuantes sobre él son nulos.
c) El torque neto actuante sobre él es nulo.
d) Ninguna.

28. Si F_1 Y F_2 producen el mismo torque respecto al punto O, la relación (F_2/F_1) es:



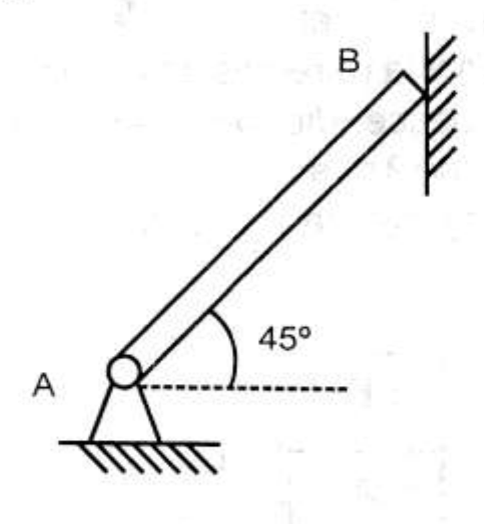
a) 30
b) 2
c) 0.5
d) Ninguna.

29. En la figura, la barra homogénea $\overline{MN}$ está articulada en M y apoyada sobre una grada lisa en el punto O. La fuerza que el pasador M ejerce sobre la barra tiene la dirección:



a) A
b) B
c) C
d) Ninguna

30. La barra homogénea de la figura está articulada en A y se apoya en una pared vertical lisa en B. El peso de la barra es 500[N].



30.1 La fuerza que el pasador A ejerce sobre la barra:

a) Es vertical.
b) Tiene la dirección de la barra.
c) Es horizontal.
d) Ninguna.

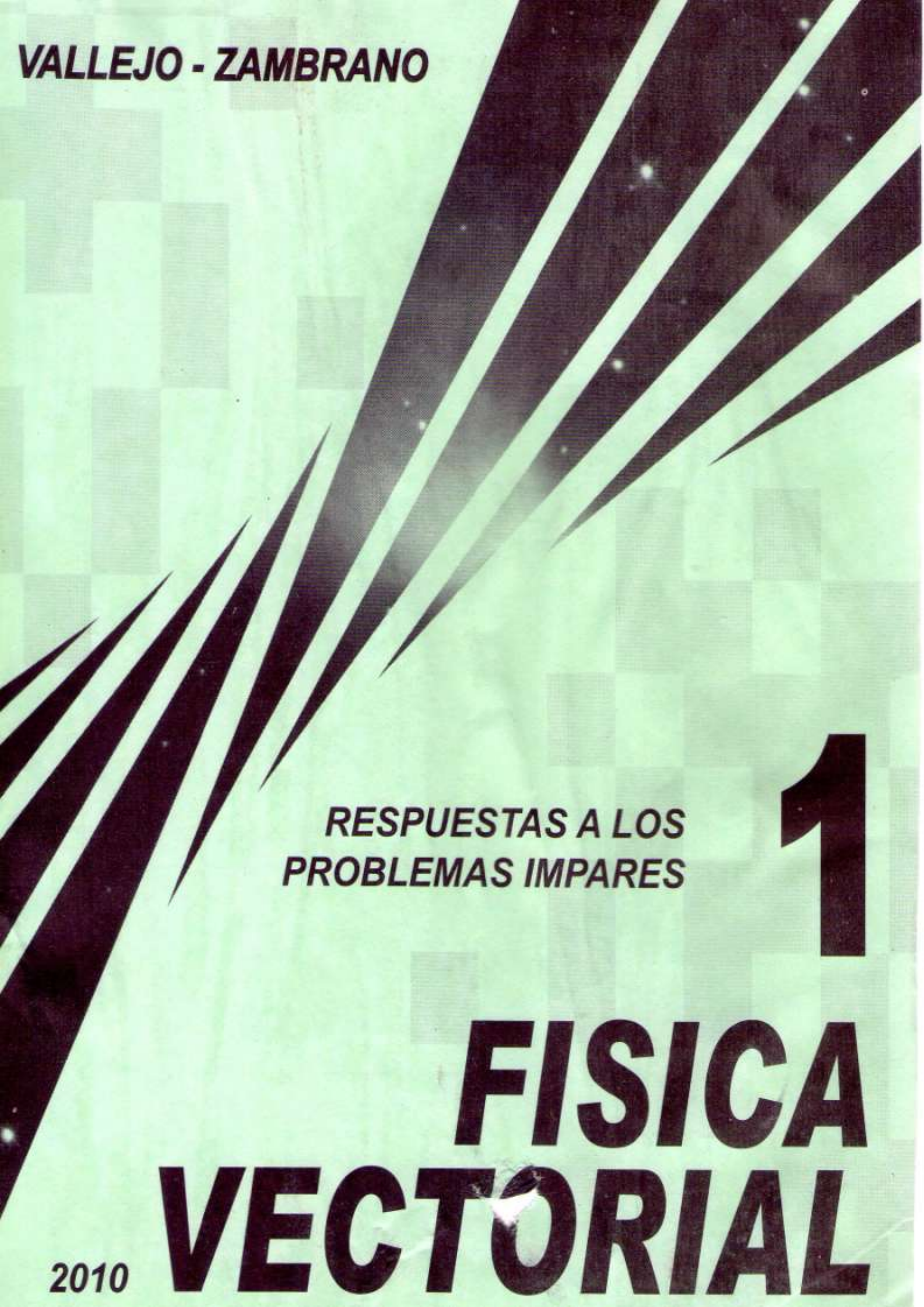
30.2 La fuerza total que el pasador A ejerce sobre la barra tiene un módulo igual a:

a) 25[N]

b) $\sqrt{500[N]}$

c) $\sqrt{500/2[N]}$

d) Ninguna.


VALLEJO - ZAMBRANO
RESPUESTAS A LOS
PROBLEMAS IMPARES
1
FISICA
VECTORIAL
2010

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS IMPARES

Ejercicio N°2

13 Son unitarios los vectores de los literales b,c,e,g,h,i.

3. R: α= 116,57° , β= 26,57° ; S: α= 60,95° , β= 150,95° ;
T: α= 147,53° , β= 122,47° ; U: α= 120° , β= 30° ; V: α= 131° , β= 139° ;
W: α= 80° , β= 170° ; X: α= 119° , β= 29° ; Y: α= 18° , β= 108° ;
Z: α= 135° , β= 135°

5. a) Rx= 12 cm , Ry= 7 cm ; b) 13,89cm ; c) N59,74°E ; d) α=30,26° , β= 59,74°
e) $\vec{R}= 12\vec{i} + 7\vec{j}$; f) $0,86\vec{i} + 0,5\vec{j}$

7. a) Ky = -52,84cm ; b) β= 145° ; c) 64,51 cm ; d) $0,57\vec{i} - 0,82\vec{j}$;
e) $\vec{K}= -37\vec{i} - 52,84\vec{j}$ cm ; f) K (-37;-52,84) cm

9. a) α=22° , β=112° ; b) Ey= -35,15N ; c) 93,83N ; d) E (87 ; -35,15)N ;
e) $0,93\vec{i} - 0,37\vec{j}$; f) $\vec{F}= -87\vec{i} + 35,15\vec{j}$ N

11. a) By= -18,91 cm ; b) 32,96 cm ; c) B(-27; -18,91) cm ; d) S 55°O ;
e) $\bar{B}$= (32,96 cm ; 215°) ; f) $- 0,82\vec{i} -0,57\vec{j}$

13. a) N25°O ; b) Ex= -28,74 cm , Ey= 61,63 cm ; c) E(-28,74 ; 61,63) cm ;
d) $-0,42\vec{i} + 0,91\vec{j}$

Ejercicio N°3

1. a) (15; -20) m ; b) (-74,56 ; 106,49) N ; c) (22,27; 29,55) cm ; d) (-15 ; -20) KgF

3. a) (57,7 N ; S25, 68°E) ; b) (47 N ; S25°O) ; c) (38,28 m ; N56,73°O) ;
d) (35 cm ; N60°E)

5. a) (29,97 m ; 244,29°) ; b) $-13\vec{i} -27\vec{j}$ m ; c) (29,97 m ; S 25,71°O) ;
d) 29,97 ($-0,43\vec{i}$ -0,9j) m

7. a) (20N ; 137°) ; b) (-14,63 ; 13,64) N ; c) $20(-0,73\vec{i} + 0,68\vec{j})$ N ; d) $-14,63\vec{i} + 13,64\vec{j}$ N

9. a) (-29 ; 35) m/s ; b) $45,45 (0,64\vec{i} + 0,77\vec{j})$ m/s ; c) (45,45 m/s ; 129,64°) ;
d) (45,45 m/s ; N 39,64°O)

11. a) $-33,48\vec{i} + 55,72\vec{j}$ km/h ; b) $49,5\vec{i} + 49,5\vec{j}$ N ; c) $104,76\vec{i} - 58,56\vec{j}$ km ;
d) $-13\vec{i} + 40\vec{j}$ N

Ejercicio N°4

1. a) 70 m ; b) 10 m ; c) 50 m ; d) 70 m

3. a) $\vec{P}= 14,62\vec{i} + 8,75\vec{j}$ m ; b) 99,11 m² ; c) $\vec{0}$

5. a) $2,61\vec{i} + 2,67\vec{j}$ m ; b) $- 71,39\vec{i} - 47,33\vec{j}$ m ; c) $68,78\vec{i} + 44,66\vec{j}$ m ; d) -1830,68 ;
e) 40,99 m ; f) 33,54 m²

7. a) $103{,}78\vec{i} + 12{,}39\vec{j}$ m/s ; b) $-149{,}48\vec{i} + 45{,}17\vec{j}$ m/s ; c) 2326,54 ; d) 43,29 ; e) $-414{,}52\,\vec{k}$; f) 0

9. a) $136{,}66\vec{i} + 66{,}90\vec{j}$ m/s ; b) $-162{,}14\vec{i} - 22{,}21\vec{j}$ m/s ; c) -5624,66 ; d) 12167,40 ; e) -5845,57 ; f) $21317{,}97\,\vec{k}$; g) 89,77°

11. 176,05°

Ejercicio N°5

1. a) $-1{,}7\vec{i} - 0{,}14\vec{j}$ m ; b) $0{,}84\vec{i} + 1{,}80\vec{j}$ m ; c) $1{,}18\vec{i} - 0{,}19\vec{j}$ m ; d) $-1{,}79\vec{i} + 0{,}33\vec{j}$ m ; e) $-1{,}83\vec{i} - 0{,}53\vec{j}$ m ; f) $0{,}58\vec{i} - 1{,}32\vec{j}$ m ; g) $1{,}83\vec{i} + 0{,}74\vec{j}$ m ; h) $-0{,}97\vec{i} - 0{,}33\vec{j}$ m ; i) $0{,}69\vec{i} - 1{,}6\vec{j}$ m

3. a) 90° , 26,57° , 63,43° ; b) Triángulo Rectángulo

5. a) Paralelogramo ; b) 13km² ; c) $-3\vec{i} - 4\vec{j}$ km ; d) $4\vec{i} + \vec{j}$ km

7. a) 0,022 galones ; b) 0,710 galones ; c) 0,255 galones ; d) 0,865 galones

9. a) $4{,}12\vec{i} - \vec{j}$ km ; b) 4,24 km (8,48 km si se considera ida y vuelta por cables independientes)

11. a) $-8{,}83\vec{i} + 1{,}17\vec{j}$ km ; b) S82,45°E ; c) 8,91 km

13. a) 28,81 m/s ; N15,71°O ; b) $-0{,}27\vec{i} + 0{,}97\vec{j}$; c) $\alpha = 105{,}71°$; $\beta = 15{,}71°$

Ejercicio N°6

1. a) $8\vec{i}$ cm ; $8{,}49\vec{i} + 8{,}49\vec{j}$ cm ; $-5\vec{j}$ cm ; b) $16{,}49\vec{i} + 3{,}49\vec{j}$ cm ; c) 16,85 cm ; d) 25 cm

3. a) $\vec{r}_A = -85\vec{i} + 204\vec{j}$ km ; $\vec{r}_B = 123\vec{i} + 347\vec{j}$ km ; b) $208\vec{i} + 143\vec{j}$ km ; c) 10487,41 km ; d) 60,58 km/h ; e) 81,86 km/h

5. a) 19,21 m/s ; b) $0{,}62\vec{i} + 0{,}78\vec{j}$; c) 0 ; d) $-0{,}6\vec{i} - 0{,}75\vec{j}$ m/s²

Ejercicio N°7

1. a) $10\vec{i} - 95\vec{j}$ km ; b) $5\vec{i} - 47{,}5\vec{j}$ km/h ; c) $3{,}33\vec{i} - 31{,}67\vec{j}$ km/h

3. a) $500\vec{i}$ m ; $1000\vec{i}$ m ; $1500\vec{i}$ m ; b) 100 m

5. a) $100\vec{i}$ km/h ; b) $900\vec{i}$ km ; c) 2,5 h

7. a) $2\vec{i}$ m/s , $2\vec{j}$ m/s , $-2\vec{i}$ m/s , $-2\vec{j}$ m/s ; b) 30s , 50s , 30s , 50s ; c) $60\vec{i} + 100\vec{j}$ m , 116,62 m ; d) 58,31s

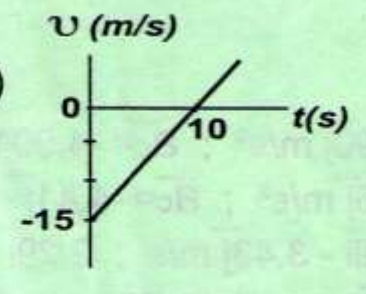
9. a) 70s , a 210 m de A ; b) 80s luego de encontrarse (150s desde que el móvil partió desde A)

11. a) 18,33 km/h ; 1,65 h

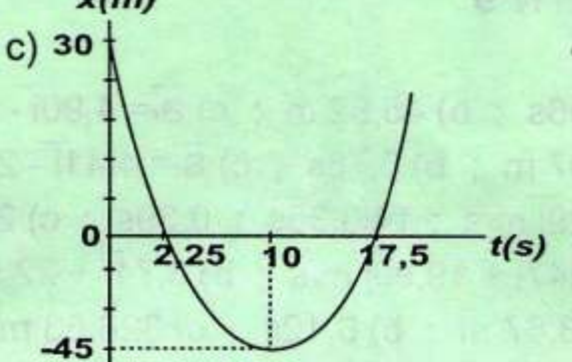
Ejercicio N°8

1. a) $107{,}6\vec{i} + 401{,}84\vec{j}$ m ; b) $13{,}45\vec{i} + 50{,}23\vec{j}$ m/s

3. a) $1,5\vec{i}$ m/s² ; b)



c)



d) 10s

5. a) $\vec{a}_A = -1,8\vec{i} - 2,4\vec{j}$ m/s² , $\vec{a}_B = 2\vec{j}$ m/s² ; b) $\vec{r}_A = -62,10\vec{i} - 81,80\vec{j}$ m , $\vec{r}_B = -\vec{i} - 158\vec{j}$ m

7. a) 8,83s ; b) 70,70 m ; c) $126,03\,\vec{i}$ m ; $-2,83\,\vec{i}$ m/s²

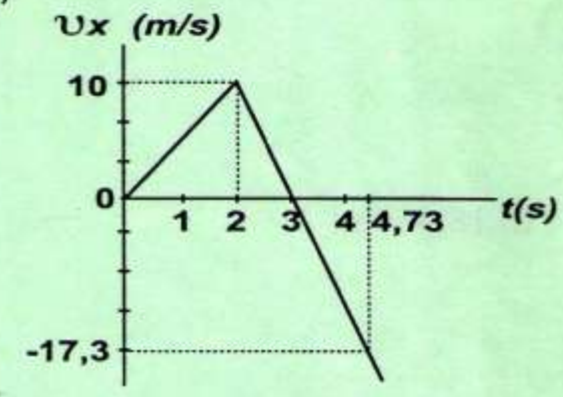
9. a) 7,81s ; 5,93s ; b) 1,25s

11. a) 34,58 m/s ; b) 61,0 m

13. a) 4,52s ; b) 4,62s ; c) 4,42s

15. a) 4 m ; b) 12 m ; c) 20 m

17. a) 0 ; b)



19. a) $\vec{a}_B = -4\vec{i}$ m/s² ; b) 8,12s

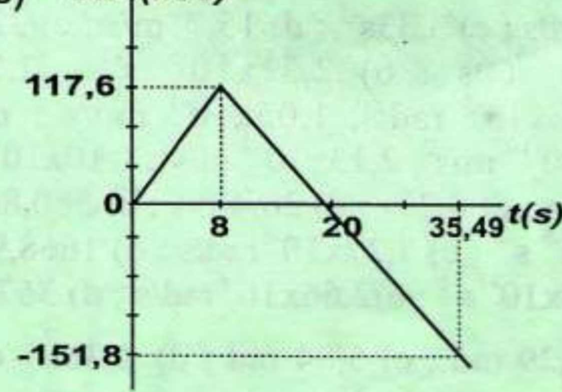
21. a) $\vec{\upsilon}_A = 32\vec{i}$ m/s ; b) $\vec{\upsilon}_{A/B} = 2\vec{i} + 20\vec{j}$ m/s

23. a) $\vec{r}_A = -8\vec{i}$ m , $\vec{r}_B = -50\vec{i}$ m ; b) $-27,5\,\vec{i}$ m ; 5,5s

25. a) 34,3 m/s ; b) 88,2 m

27. a) $10\vec{i}$ m/s ; $-10\vec{i}$ m/s ; b) 0 m

29. a) 1176 m ; b) 35,49s ; c)



Ejercicio N°9

1. a) 3,06s ; b) 45,92 m ; c) $\vec{a}_t = 4{,}90\vec{i} - 4{,}90\vec{j}\ m/s^2$; $\vec{a}_c = -4{,}901 - 4{,}90\vec{j}\ m/s^2$

3. a) 9,07 m ; b) 0,76s ; c) $\vec{a}_t = 4{,}41\vec{i} - 2{,}76\vec{j}\ m/s^2$; $\vec{a}_c = -4{,}41\vec{i} - 7{,}04\vec{j}\ m/s^2$

5. a) $2{,}29\vec{i}$ m/s ; b) 0,35s ; 0,39s ; c) $2{,}29\vec{i} - 3{,}43\vec{j}$ m/s ; $2{,}29\vec{i} - 3{,}82\vec{j}$ m/s

7. a) $34{,}47\vec{i} + 19{,}90\vec{j}$ m/s ; b) $3{,}71\vec{i} + 22{,}50\vec{j}$ m ; c) 42,70 m ; d) 203,37 m

9. a) 183,67 m ; b) 6,12s ; c) 326,53 m

11. a) 9,25s ; b) 1197,62 m y 510,20 m respectivamente ; c) 4019,73 m y 3534,90 m respectivamente ; d) $4616\vec{i} - 816\vec{j}$ m

13. a) $50\vec{i} + 84{,}64\vec{j}$ m/s ; b) $-4{,}25\vec{i} - 7{,}34\vec{j}\ m/s^2$; c) (431,83 ; 380,63)m ; d) 18,50 m

15. a) $4\vec{i} + 1{,}45\vec{j}$ m/s ; b) 0,11 m ; c) No alcanza la grada

17. a) $10\vec{i} + 7{,}95\vec{j}$ m/s ; b) 3,23 m ; c) 16,22 m ; d) 1,62s

19. a) 33,18 m ; b) 3,16s ; c) 0,51s (luego de haber alcanzado la altura máxima) ; d) $15\vec{i} - 4{,}99\vec{j}$ m/s

Ejercicio N°10

1. a) 17,45 rad ; b) 1,45 rad/s ; c) 1,03 rad ; d) 18,48 rad

3. a) 168 rad ; b) 26,74 vueltas

5. a) 26,18 rad/s ; b) 78,54 rad ; c) 1,07s

7. a) 18,85 rad/s^2 ; b) 172,79 rad/s ; c) 863,94 rad

9. a) 26 rad/s ; b) 16 rad/s ; c) $-1{,}62\vec{i} + 6{,}51\vec{j}$ m

Ejercicio N°11

1. a) 20,94 rad/s ; b) 0,30s ; c) $3{,}33 s^{-1}$; d) 15,71m/s ; e) $328{,}86 m/s^2$

3. a) 43200s, 3600s, 60s ; b) $2{,}31\times10^{-5}\ s^{-1}$, $2{,}78\times10^{-4}\ s^{-1}$, $1{,}67\times10^{-2}\ s^{-1}$; c) $1{,}45\times10^{-4}$ rad/s, $1{,}14\times10^{-3}$ rad/s, $1{,}05\times10^{-1}$ rad/s ; d) $5{,}81\times10^{-6}$m/s, 1.22×10^{-4}m/s, $1{,}05\times10^{-2}$m/s ; e) $8{,}46\times10^{-10}\ m/s^2$, $2{,}13\times10^{-7}\ m/s^2$, $1{,}10\times10^{-3}\ m/s^2$

5. a) 132 rad ; b) 158,4m ; c) 0,29s ; d) 26,4m/s ; e) $580{,}8 m/s^2$

7. a) 86400s b) $1{,}15\times10^{-5}\ s^{-1}$; c) $7{,}27\times10^{-5}$rad/s ; d) 1668,97 Km/h ; e) $0{,}033 m/s^2$

9. a) 2360600s ; b) $4{,}24\times10^{-7} s^{-1}$; c) $2{,}66\times10^{-6}$rad/s ; d) 3679,52Km/h ; e) $2{,}72\times10^{-3} m/s^2$

11. a) 0,63 rad/s ; b) 1,29 rad ; c) 5,04 rad ; d) $2{,}36\vec{i} - 6{,}89\vec{j}$ m ; e) 9,97s ; f) 0,10 s^{-1} ; g) $4{,}13\vec{i} + 1{,}48\vec{j}$ m/s ; h) $-0{,}78\vec{i} - 2{,}73\vec{j}\ m/s^2$

13. a) 36 rad ; b) 5,64 rad ; c) 41,64 rad ; d) $-3{,}49\vec{i} - 3{,}58\vec{j}$ m ; e) 5,73 vueltas ; f) 2,09s ; g) $9\vec{i} + 12\vec{j}$ m/s ; h) $31{,}38\vec{i} + 32{,}25\vec{j}\ m/s^2$

15. a) 0,49 rad/s ; b) 12,95s ; c) 2,9 rad ; d) –4,45 rad ; e) $-1{,}07\vec{i}+3{,}98\vec{j}\ m$; f) 1,17 rad g) $0{,}49\vec{i}+1{,}94\vec{j}\ m/s$; h) $0{,}25\vec{i}-0{,}94\vec{j}\ m/s^2$

Ejercicio Nº12

1. a) 0,05 rad/s ; b) 0,025 rad/s ; c) 0,001 rad/s^2 ; d) 1,25 rad ; e) 500m ; f) 1121s ; g) 1,08m/s^2 (en t=50s)
3. a) 31,41m/s ; b) 272,27 rad/s ; c) 2,09 rad/s^2 ; d) 17592,6 rad ; e) 2799,95 vueltas ; f) 26388,90m ; g) 657,73m/s^2
5. a) 3,6m/s ; b) 174 rad/s ; c) 104,4m/s ; d) 90 rad/s ; e) 5400rad ; f) 859,44 vueltas ; g) 21,67m/s^2
7. a) 41,89 rad/s ; b) 4,19 m/s ; c) 20,94 rad/s ; d) 314,16 rad ; e) 50 vueltas ; f) 31,42m g) 175,46m/s^2
9. a) 1,75 rad/s^2 ; b) –14 rad ; c) 3,5 rad/s ; d) –13,53 rad ; e) $0{,}80\vec{i}-1{,}15\vec{j}\ m$; f) $-8{,}05\vec{i}-5{,}59\vec{j}\ m/s$; g) $-41{,}15\vec{i}+54{,}94\vec{j}\ m/s^2$
11. a) 20 rad/s ; b) $8{,}19\vec{i}-5{,}74\vec{j}\ m/s$; c) 15,92s ; d) 159,15 rad ; e) 163,25 rad ; f) $0{,}497\vec{i}-0{,}056\vec{j}\ m$; g) $114{,}21\vec{i}+164{,}19\vec{j}\ m/s^2$
13. (a), (b), (c) en el intervalo de 0s – 8 s, (e) en t=8s; a) 4,24 rad ; b) horario: 4,48 rad, antihorario:8,72 rad , total: 13,20 rad ; c) 19,80m ; d) $0{,}17\vec{i}+1{,}49\vec{j}\ m$; e) $-1{,}10\vec{i}-1{,}02\vec{j}\ m$; f) $3{,}81\vec{i}-4{,}10\vec{j}\ m/s$; g) $16{,}13\vec{i}+13{,}36\vec{j}\ m/s^2$
15. a) 4,37 rad ; b) antihorario: 8,78 rad, horario: 4,41 rad, total: 13,19 rad ; c) 9,23m ; d) $0{,}7\vec{i}\ m$; e) $-0{,}2\vec{i}+0{,}67\vec{j}\ m$; f) $2{,}05\vec{i}+0{,}63\vec{j}\ m/s$; g) $2{,}63\vec{i}-6{,}04\vec{j}\ m/s^2$

Ejercicio Nº13

1. a) 0,49m/s^2 ; b) 25,1m/s
3. a) 3920N ; b) 0,15
5. a) 9,78 m/s^2 ; b) 20,45 Kg
7. a) $-28\vec{i}+57\vec{j}\ m$; b) $-12\vec{i}+24\vec{j}\ m/s$
9. a) 196N ; b) 20N
11. a) 15,16N ; b) 35,78N
13. a) 197,92N ; b) 96,08N ; c) 227,92N ; d) 66,08N
15. a) 46,86N ; b) 20,55N ; c) 53,79N ; d) 13,24N
17. a) 0,64s ; b) 0,57m
19. a) $a_A=a_B=4{,}15m/s^2$; b) A hacia arriba , B hacia abajo ; c) 45,20N ; d) 8,30m/s
21. a) $a_A=a_B=0{,}035m/s^2$; b) A hacia abajo, B hacia arriba ; c) 0,14 m/s
23. R_A=159,55N; R_B=191,47N; R_C=122,19N; R_D=130,03N
25. a) 0,75m/s^s ; b) 316,62N ; c) 13,57m
27. a) 3,92m/s^s ; b) T_{AB}=68,60N, T_{BC}=176,40N
29. a) 9,95Kg ; b) 28,65 Kg ; c) 4,13Kg ; d) 44,08Kg

Ejercicio Nº14

1. a) 15 m/s^2 ; b) 30 N ; c) 32,31 N
3. a) 1600 m/s^2 ; b) 800 N ; c) 44,72 m/s
5. a) 80 m/s^2 ; b) 2 rad/s^2 ; c) 153600 N
7. a) 7390,36 m/s^2 ; b) 59122,88 N
9. a) $-19{,}05\vec{i} - 9{,}08\vec{j}$ N ; **b)** $19.05\vec{i} - 39{,}92\vec{j}$ N ; c) $-49\vec{j}$ N
11. a) 6,26 m/s ; b) 0 ; c) 9000 N
13. a) 8,32 N ; b) 19,56º
15. a) 29,82 Km/h ; b) 69,14º (óptimo)
17. a) $151{,}8\vec{j}$ N ; b) $-76{,}89\vec{i} + 76{,}89\vec{j}$ N ; c) $-4{,}8\vec{i}$ N
19. a) 0 ; b) $33{,}33\vec{j}$ N ; c) $-33{,}33\vec{j}$ N

Ejercicio Nº15

1. 25,98 Nm, antihorario
3. T_A= 120 N, T_B= 180 N
5. 4 m
7. R_{Ax}= 285,14 N, R_{Ay}= 727,41 N , R_B= 529,1 N
9. a) $-643{,}35\vec{i} + 500\vec{j}$ N ; b) $643{,}35\vec{i}$ N
11. a) 1261,09 N ; b) $1033{,}03\vec{i} + 576{,}67\vec{j}$ N
13. a) 630,19 N ; b) $630{,}19\vec{i} + 1300\vec{j}$ N
15. 0,18
17. 3983,43 N ; $2560{,}50\vec{i} + 2384{,}52\vec{j}$ N
19. a) 47,98º ; b) $\overrightarrow{R_A} = 110{,}98\vec{i}$ N , $\overrightarrow{R_C} = -110{,}98\vec{i} + 100\vec{j}$ N